VISIT MATH

Cofinanziato dall'Unione europea

Algebra

Argomento	Equazione con 1 o 2 variabili
Obiettivi di apprendimento	Saper riportare i punti in un sistema di coordinate cartesiane, soluzione di equazioni in due variabili. Saper risolvere i problemi massimo/minimo con le funzioni quadratiche. Saper ricavare le equazioni delle coniche dai dati e viceversa.
Fascia d'età	14-18 anni (da adattare in ogni paese)
Durata stimata	2 ore
Attività	Ricerca di punti speciali di ellissi e parabole ottenuti da situazioni reali
Visite correlate	Pisa, Lucca

Conoscenze pregresse richieste

Conoscere il piano cartesiano come sistema di riferimento di coordinate; saper riconoscere il tipo di conica quando viene messa in forma normale.

Passo dopo passo: la sequenza in aula

Passaggio 1: presentazione dell'argomento

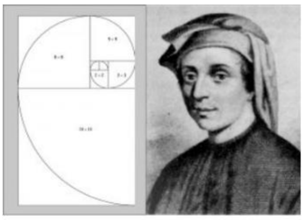
Equazioni con due incognite è un argomento che spazia dall'Analisi alla Geometria e all'Algebra. Sono equazioni in x e y e le soluzioni sono tutte e solo le coppie ordinate (x;y) che rendono vera l'uguaglianza. L'insieme di queste soluzioni corrisponde ad un luogo geometrico nel piano cartesiano. In particolare ci occuperemo della parabola e dell'ellisse.

Breve presentazione degli elementi del patrimonio in questa sequenza

Le equazioni furono introdotte per la prima volta nel IX secolo d.C. dall'astronomo matematico persiano Al-Khwarizmi per risolvere problemi di divisione mercantile o ereditaria.

Al-Khwarizmi-Il padre di Algebra-olympic.uz

L'algebra classica, invece, è nata e si è sviluppata nel mondo arabo; in Italia si è dovuto attendere l'XI secolo, quando sorsero le scuole di Abaco, a cui diede un notevole contributo Leonardo Pisano, detto il Fibonacci.



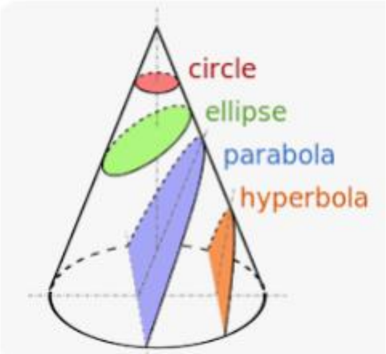
Leonardo Pisano-La tecnica della scuola

Più tardi, nel Rinascimento, ci furono grandi algebristi come Pacioli, Cardano e Bombelli.

Descartes-Shutterstock

Solo più tardi, nel XVII secolo, il simbolismo, che conosciamo e usiamo ancora oggi, fu introdotto da Cartesio. Fu proprio da allora in poi, grazie a lui e a Fermat, che l'algebra si fuse con la geometria. Nel 1637 Cartesio introdusse la geometria analitica e affermò che le equazioni di 2 ° grado erano proprio le coniche studiate da Apollonio (262-190 a.C.). Con l'introduzione dei nuovi metodi algebrici legati al piano cartesiano, Cartesio e Fermat riuscirono a risolvere in modo più semplice i problemi affrontati e a verificare le proprietà delle coniche. In realtà questi ultimi erano stati precedentemente scoperti da Menecmo (380-320 a.C.), mentre cercava di risolvere il problema della duplicazione del cubo.

Menecmo fu il primo a dimostrare che le coniche potevano essere ottenute intersecando un cono con un piano (da cui il nome coniche). In seguito Apollonio dimostrò che si potevano ottenere anche da un cono a doppia falda, intersecandolo con un piano la cui inclinazione variava. A lui si devono anche i nomi di parabola, ellisse e iperbole. Dopo Apollonio lo studio delle coniche fu abbandonato.

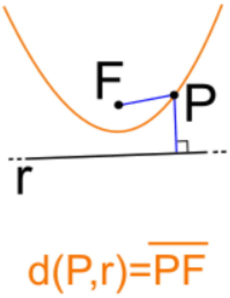


Apparvero di nuovo durante il Rinascimento, nell'arte, con la prospettiva, e poi nel Barocco, dove le linee curve (ellissi) assunsero un posto privilegiato.

Collegamenti tra questi elementi e argomenti matematici

Le coniche sono di quattro tipi: parabola, circonferenza, ellisse e iperbole. Due importanti applicazioni a situazioni reali, per la ricerca del massimo e del minimo o per problemi acustici, riguardano nello specifico le parabole e le ellissi, su cui ci concentreremo.

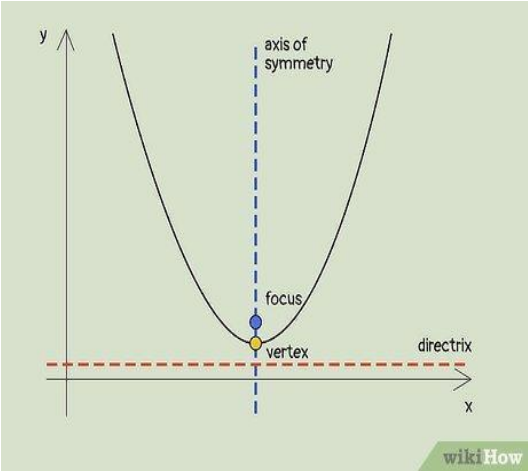
La parabola è il luogo geometrico dei punti sul piano P equidistanti da un dato punto, detto fuoco, F, e da una data retta, r, detta direttrice.



Dalla definizione possiamo ricavare, con alcuni passaggi algebrici, l'equazione della parabola:

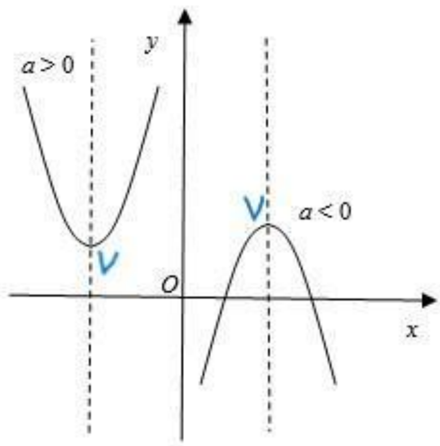
$$y = ax^2 + bx + c$$

Le parabole con questa equazione hanno l'asse di simmetria parallelo all'asse y:



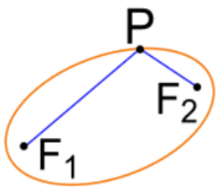
Se a>0 la concavità è rivolta verso l'alto e il vertice V è il punto più basso.

Se a<0 la concavità è rivolta verso il basso e il vertice V è il punto più alto.



$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti P sul piano in modo tale che la somma delle distanze di questi punti da due punti fissi, detti fuochi, F_1 e F_2, sia costante.



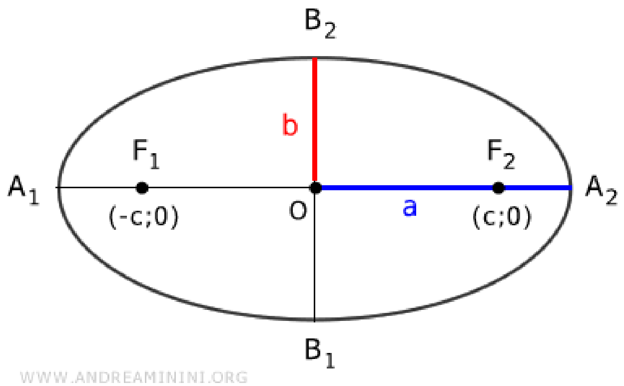
$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=$ costante

Dalla definizione, con alcuni passaggi algebrici, si arriva all'equazione dell'ellisse in forma normale:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

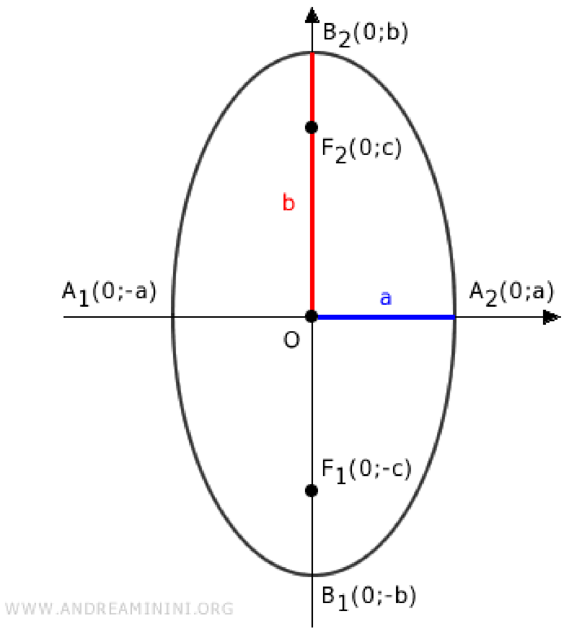
a e b sono le lunghezze dei semiassi.

Se a>b, i fuochi sono sull'asse x:



$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

Se a<b, i fuochi sono sull'asse y:



$$c=\sqrt{b^2-a^2}$$

Fase 2: Attività in classe

Esercizio 1

Sfida: hai solo 320 m di recinzione e vuoi recintare più terra possibile. Il recinto deve essere rettangolare. Quanto dovrebbero essere lunghi i lati di questo rettangolo?

Se prendi $L1$ =10m e $L2$ =150m, il rettangolo avrà area...

Se prendi $L1$ =20m e $L2$ =140m, il rettangolo avrà area...

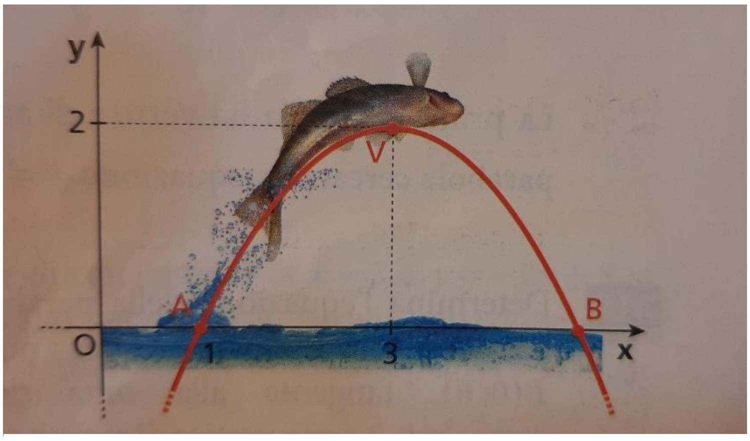
Attenzione, ricordiamo che il perimetro deve essere 320m: $2L1$ + 2L2 = 320m, quindi $L1$ + $L2$ = 160m.

Dopo tentativi ed errori, prova a risolvere lo stesso problema usando x come sconosciuto per un lato (e di conseguenza l'altro sarà 160-x) e ottenendo la parabola associata alla formula dell'area: y=x(160-x). Quale punto speciale di questa parabola corrisponde alla soluzione del problema?

Esercizio 2

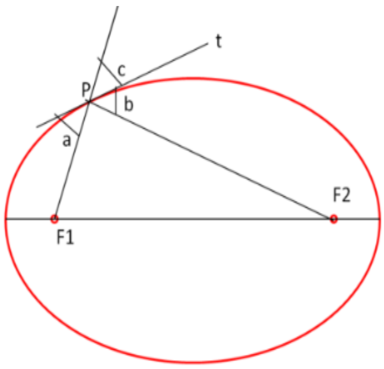
Osservare la traiettoria del pesce. Riconosci qualche curva in particolare? Cosa rappresenta il punto più alto di questa curva? Determina le coordinate di questo punto. Trovare quindi l'ascissa del punto B, dove il pesce rientra in acqua.

*Sfida: prova a determinare l'equazione della curva che descrive la traiettoria del pesce.

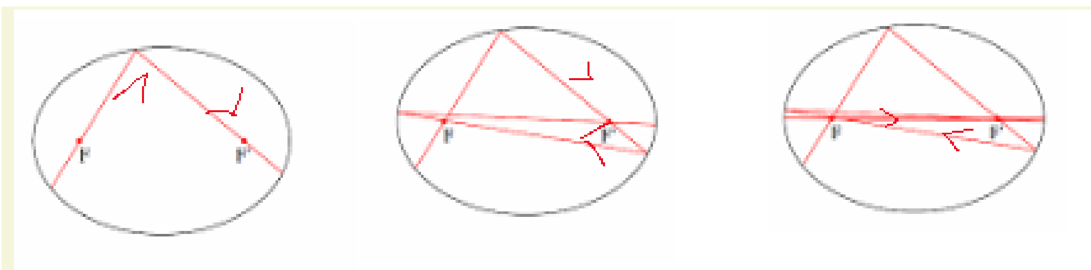


Esercizio 3

Provate a costruire un'ellisse in base alle caratteristiche del luogo geometrico. Prendete un foglio di carta, perforatelo in due punti - che corrisponderanno ai due fuochi - e tagliate un pezzo di filo della lunghezza desiderata. Attaccare il filo ai due punti, fissandolo sul retro con il nastro adesivo, e poi con una matita, tirando la corda fino a quando non è tesa, disegnare l'ellisse sul foglio. Al seguente link è possibile guardare un video che lo mostra:
https://www.youtube.com/shorts/nKqfHrYFne8
Tracciare una traiettoria di una palla da biliardo sull'ellisse disegnata e calcolare la traiettoria del rimbalzo sull'ellisse, sapendo che il rimbalzo ha lo stesso angolo rispetto alla perpendicolare della traiettoria di arrivo.



Dove arrivano sicuramente le palline che partono da un focus, dopo il primo rimbalzo? Utilizzare il goniometro per calcolare con precisione l'angolo.



Esercizio 4

In questa foto del Colosseo si può vedere la struttura a forma ellittica. La lunghezza massima (asse maggiore) dell'anfiteatro è di circa 188m, mentre la sua larghezza massima (asse minore) è di circa 156m. Ottenere l'equazione dell'ellisse che rappresenta il contorno esterno dell'edificio, scegliendo il centro dell'ellisse come origine del sistema di riferimento e la retta contenente l'asse maggiore come asse x. Dove sono i fuochi in questo sistema di riferimento?

Bergamini-Barozzi-Trifone-Lineamenti di matematica.azzurro-vol.3

Fase 3: compiti a casa e idee di sviluppo

Esercizio 1

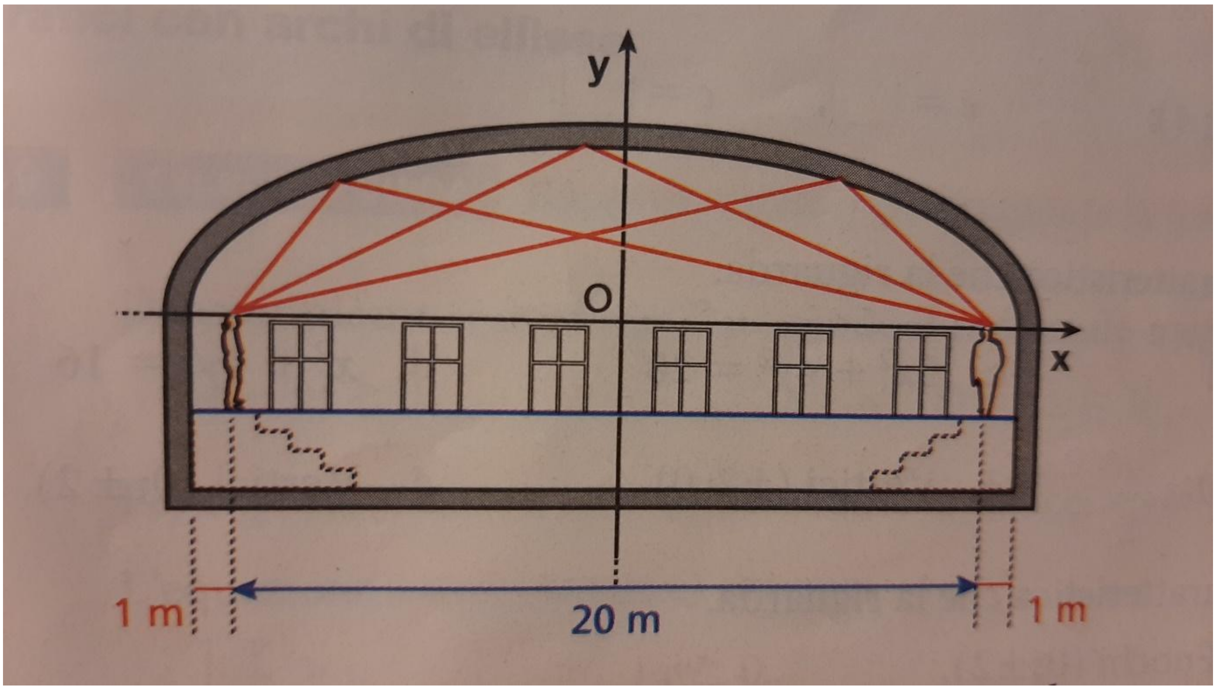
Un filo lungo 20 cm viene tagliato in due parti. Con i due pezzi ottenuti si formano due quadrati. A che punto dovremmo tagliare il filo in modo che la somma dei quadrati sia minima?

Esercizio 2

Una finestra è formata da un rettangolo sormontato da un semicerchio, con il diametro coincidente con un lato del rettangolo. Se il perimetro della finestra è di 24 m, determinare il raggio del semicerchio in modo che la luce che entra attraverso la finestra sia massima.

Esercizio 3

Una camera a volta ellissoidale ha questa proprietà acustica: se due persone si posizionano nei fuochi dell'ellisse e parlano a bassa voce, con le spalle rivolte, possono ascoltarsi molto bene, come se fossero vicini. Ciò è dovuto al riflesso delle onde acustiche sulle pareti della volta. Nella figura seguente vediamo due persone con la testa nei fuochi dell'ellisse. Trova l'equazione.
(Dal disegno è possibile ottenere la lunghezza dell'asse maggiore, 2a, e la distanza focale, 2c. Come puoi ottenere b?)



Bergamini-Barozzi-Trifone-Lineamenti di matematica.azzurro-vol.3

Materiale necessario per il tour

Spago, lenzuola, forbici, nastro adesivo, goniometro, matita.

Cofinanziato dall'Unione europea

Il progetto è finanziato con il sostegno della Commissione europea. Questo progetto è stato finanziato con il sostegno della Commissione Europea. Questa pubblicazione riflette solo le opinioni dell'autore e la Commissione non può essere ritenuta responsabile per qualsiasi uso che possa essere fatto delle informazioni in essa contenute.

Codice progetto: 1-FR01-KA220-SCH-00027771

Scopri di più su Visit Math su: https://visitmath.eu