VISIT MATH

Cofinanziato dall'Unione europea

Progressione aritmetica e geometrica

Argomento	Progressioni numeriche
Obiettivi di apprendimento	Applicazione delle progressioni numeriche nei calcoli pratici
Fascia d'età	14-18 anni (da adattare in ogni paese)
Durata stimata	2 ore
Attività	Utilizzo di progressioni numeriche per calcoli finanziari
Visite correlate	Varsavia, Lille, Amiens, Lucca, Agen

Conoscenze pregresse richieste

Lo studente deve essere in grado di:

- calcolare il termine successivo di una progressione aritmetica dato il suo primo termine e la differenza comune;
- calcolare il termine successivo di una progressione geometrica dato il suo primo termine e il rapporto comune;
- applicare formule per la somma dei primi n termini per entrambe le progressioni.

Passo dopo passo: la sequenza in aula

Passaggio 1: presentazione dell'argomento

Breve presentazione degli elementi del patrimonio in questa sequenza

Un fatto interessante legato alle progressioni aritmetiche proviene dalla vita di Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), scienziato e inventore tedesco. Gauss ha mostrato eccezionali capacità matematiche fin dalla giovane età.

Presumibilmente, quando Gauss aveva 7 anni, il suo insegnante chiese agli studenti di calcolare la somma dei numeri naturali da 1 a 50 (che formano una sequenza aritmetica con il primo termine e la differenza comune entrambi uguali a 1).

L'insegnante probabilmente sperava che questo compito avrebbe richiesto molto tempo agli studenti, fornendogli pace per il resto della lezione. Immagina la sua sorpresa quando il giovane Gauss fornì la risposta corretta in pochissimo tempo.

Forse Gauss lo calcolò come segue: scrisse i numeri da 1 a 50, e sotto di essi, gli stessi numeri in ordine inverso, poi li sommò:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 49 + 50 \\ + \;\; 50 + 49 + 48 + 47 + \ldots + 2 + 1 \\ \hline 51 + 51 + 51 + 51 + \ldots + 51 + 51 = 51 * 50 \end{array}$$

In questo modo, ottenne un numero due volte più grande della somma cercata.

Pertanto:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 49 + 50 = \frac{51 * 50}{2} = 1275$$

Collegamenti tra questi elementi e argomenti matematici

Il metodo Gauss utilizzato per calcolare la somma dei primi 50 numeri naturali può essere applicato per trovare la somma dei primi n termini di qualsiasi progressione aritmetica:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

S_n-somma dei primi n termini della progressione

a1- il primo termine della progressione

an- l'ultimo termine della progressione

Nel caso di ciò che ha calcolato Gauss, possiamo dire che il numeratore in questa formula:

$a_1 + a_n = 51$, mentre $n = 50$.

A proposito, ricordiamo la formula per il prossimo termine di una progressione aritmetica:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Dove ***r*** è la differenza comune.

Una progressione geometrica, invece, è una progressione numerica con almeno tre termini, dove ogni termine a partire dal secondo è ottenuto moltiplicando il termine precedente per un numero chiamato rapporto comune.

Un esempio di tale progressione è: -1, 2, -4, 8,... dove il primo termine a_1 = -1 e il rapporto comune (q) è (-2).

Per ottenere i termini successivi di una progressione geometrica dobbiamo usare la formula:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

La formula per la somma dei primi n termini di una progressione geometrica è:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Sn-somma dei primi n termini della progressione

a1- il primo termine della progressione

q - la ragione

Fase 2: Attività in classe

Riscaldamento

1. In una progressione aritmetica data $a_1 = 16$ e r=-2. Calcola a_{50} e la somma dei primi 50 termini di questa progressione.
2. Controllare se i numeri: $14,\ 2,\ \frac{2}{7},\ \frac{1}{2}$ formano una progressione geometrica.

Paghetta

Immagina un parente incredibilmente ricco che ti fa visita e promette di darti una paghetta ogni mese per i prossimi due anni. Ti offre due opzioni:

Opzione 1:	**Opzione 2:**
Nel primo mese, ricevi **100€**, e in ogni mese successivo, riceverai più del mese precedente di un importo pari al 50% della paghetta nel primo mese.	Nel primo mese, riceverai **2€**, e in ogni mese successivo, riceverai il 50% in più rispetto al mese precedente.

Che opzione sceglieresti?

Calcoliamo che paghetta riceveresti ogni mese. K_n indica la paghetta (in €) ricevuta nel mese n-esimo. Quindi, la situazione si presenta così:

Opzione 1:	Opzione 2:
$K_1 = 100$ $K_2 = K_1 + 50 = 100 + 50$ $K_3 = K_2 + 50 = 100 + 2 * 50$ $K_4 = K_3 + 50 = 100 + 3 * 50$ $\dots$ $K_n = K_{n-1} + 50 = 100 + (n-1) * 50$	$K_1 = 2$ $K_2 = K_1 * 1{,}5 = 2 * 1{,}5$ $K_3 = K_2 * 1{,}5 = 2 * 1{,}5^2$ $K_4 = K_3 * 1{,}5 = 2 * 1{,}5^3$ $\dots$ $K_n = K_{n-1} * 1{,}5 = 2 * 1{,}5^{n-1}$

I pagamenti successivi nella prima opzione formano una progressione aritmetica (con il primo termine K_1 =100 e la differenza comune r=50) e nella seconda opzione una geometrica (con il primo termine K1= 2 e il rapporto comune q=1,5).

Esercizio 1

Completa la tabella e scoprirai che paghetta riceveresti in ogni mese del primo anno:

Mese	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Opzione 1	100	150	200	?	?	?	?	?	?	?	?	650
Opzione 2	3	4.5	6,75	?	?	?	?	?	?	?	?	173

Questa tabella mostra quanta paghetta riceveresti nell'ultimo mese del primo e del secondo anno:

	Opzione 1:	Opzione 2:
K12	100+11*50=650	$2^{*1.511}$≈173
K24	100+23*50=1 250	2*1.523≈22 445

Se scegliamo l'opzione 1, riceveremmo di più nell'ultimo mese del primo anno rispetto all'opzione 2. Tuttavia, nell'ultimo mese del secondo anno, il pagamento secondo l'opzione 2 è significativamente più alto.

Ora calcoliamo la somma di tutti i pagamenti da entrambe le opzioni. Qui useremo formule per la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica e geometrica.

Opzione 1:	**Opzione 2:**
$S_{24} = \frac{K_1 + K_{24}}{2} * 24 = \frac{100 + 1250}{2} * 24 = 22\,800$	$S_{24} = K_1 * \frac{1 - q^{24}}{1 - q} = 2 * \frac{1 - (1{,}5)^{24}}{1 - 1{,}5} \approx 67\,332$

L'opzione 2, anche se inizialmente sembrava meno attraente, si è rivelata molto più vantaggiosa dell'opzione 1.
Entrambe queste opzioni ci ricordano i due modi più comuni di calcolare gli interessi nelle varie operazioni finanziarie. Diamo un'occhiata più da vicino all'opzione 2.
In questo metodo, gli interessi sono calcolati sul capitale aumentato degli interessi del periodo precedente. Se il capitale iniziale era K0 e il tasso di interesse è p%, dopo ogni periodo di calcolo degli interessi, il capitale insieme agli interessi è:

Dopo il primo periodo: $K_1 = K_0 + \frac{p}{100} K_0 = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

Dopo due periodi: $K_2 = K_1 + \frac{p}{100} K_1 = K_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$

Dopo n periodi: $K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Questo metodo di calcolo degli interessi (profitto) viene solitamente applicato nel calcolo degli interessi sui depositi bancari. Quando la banca aggiunge l'importo degli interessi al capitale (saldo del conto), diciamo che l'interesse è composto.
Nota: nei seguenti compiti, quando parliamo di interessi sui depositi bancari, non consideriamo l'imposta sugli interessi (sugli utili), cioè assumiamo che il tasso di interesse fornito sia netto.

Compito 1

Su un conto con un tasso di interesse del 4% annuo sono stati depositati €10.000. Calcola il saldo del conto dopo 5 anni se il proprietario del conto non effettua depositi o prelievi.

K0 = € 10 000 K0 - importo depositato

p% = 4% p - tasso di interesse annuo

n = 5 n - numero di anni (periodi di maturazione degli interessi)

K5 - saldo del conto dopo 5 anni

$$K_5 = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 = 10\,000\left(1 + \frac{4}{100}\right)^5 = ?$$

Completa i calcoli. Il profitto da questo deposito è superiore a €2 000?

Per i depositi inferiori a 1 anno, la banca calcola gli interessi dopo ogni periodo di durata del deposito. Ad esempio, se lasciamo i soldi in un deposito di 3 mesi per 2 anni, gli interessi saranno calcolati ogni 3 mesi, in questo caso, 8 volte. Dovremmo considerare anche questo nel determinare il tasso di interesse (p). Ne discuteremo nella prossima attività.

Compito 2

Depositiamo €30.000 in un deposito di 2 mesi. Il tasso di interesse per questo deposito è del 5% annuo. Quale sarà il saldo del conto dopo un anno e mezzo?

K0 = €30.000

n = 9 (1,5 anni = 18 mesi e il deposito è di 2 mesi)

$$p\% = \frac{2}{12} * 5\% = \frac{5}{6}\%$$

Calcola il tasso di interesse per il periodo di deposito.

Calcolare secondo la formula: saldo $K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ del conto dopo 18 mesi:

$$K_9 = 30\,000\left(1 + \frac{5}{6 * 100}\right)^9 = ?$$

Fase 3: compiti a casa e idee di sviluppo

Karol, che ha 25 anni, intende depositare 100€ in un fondo pensione all'inizio di ogni mese. Il tasso di interesse del fondo è del 6% annuo e gli interessi sono composti mensilmente. Quale capitale accumulerà Karol quando raggiungerà l'età di 65 anni?

Materiali necessari per il tour

Calcolatrice

VISIT MATH

Cofinanziato dall'Unione europea

Il progetto è finanziato con il sostegno della Commissione europea. Questo progetto è stato finanziato con il sostegno della Commissione Europea. Questa pubblicazione riflette solo le opinioni dell'autore e la Commissione non può essere ritenuta responsabile per qualsiasi uso che possa essere fatto delle informazioni in essa contenute.

Codice progetto: 1-FR01-KA220-SCH-00027771
Scopri di più su Visit Math su: https://visitmath.eu

FERMAT SCIENCE Une autre idée des maths

5th HIGH SCHOOL Agrinio·Greece

ISTITUTO STATALE "E. MONTALE" PONTEDERA

LogoPsyCom

ZS 31

YuzuPulse