

Διανύσματα

Θέμα	Διανύσματα
Μαθησιακοί στόχοι	Κατανόηση των χαρακτηριστικών και της λειτουργίας ενός διανύσματος Κατανόηση της χρήσης και των υπολογισμών με διανύσματα
Ηλικιακή ομάδα	12-16 ετών (προσαρμόσιμο για κάθε χώρα)
Εκτιμώμενη διάρκεια	45 λεπτά
Εργασίες	Εφαρμοσμένη χρήση διανυσμάτων
Σχετικές επισκέψεις	Τουλούζη

Προηγούμενες απαιτούμενες γνώσεις

Ορισμός διανύσματος
Διανυσματικές πράξεις
Καρτεσιανές συντεταγμένες

Βήμα -βήμα: η ακολουθία στην πράξη

Βήμα 1: Εισαγωγή στο θέμα

Σύντομη παρουσίαση των ιστορικών στοιχείων της συγκεκριμένης ακολουθίας

Στα μαθηματικά, διάνυσμα είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο που χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει μια ποσότητα που έχει μέγεθος (ή διάσταση) και διεύθυνση. Τα διανύσματα χρησιμοποιούνται συνήθως για να περιγράψουν φυσικά μεγέθη όπως ταχύτητα, δύναμη, μετατόπιση, ηλεκτρικό πεδίο κ.λπ. Είναι απαραίτητα σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών και της φυσικής.

Η προέλευση των διανυσμάτων:

Η έννοια του διανύσματος είναι ο καρπός μιας μακράς ιστορίας που ξεκίνησε πριν από δύο χιλιάδες χρόνια. Δύο μαθηματικές προσεγγίσεις, αρχικά διακριτές, βρίσκονται πίσω από την επισημοποίηση της έννοιας του διανύσματος. Η μία ήταν η γεωμετρία, που ασχολείται με τα μήκη, τις γωνίες και τη μέτρηση επιφανειών και όγκων. Η άλλη είναι η άλγεβρα, η οποία ασχολείται με αριθμούς, πρόσθεση ή πολλαπλασιασμό και, γενικότερα, σύνολα με πράξεις.

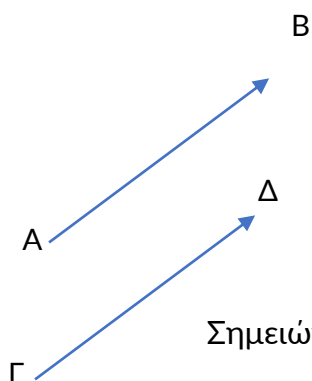
Βήμα 2: Δραστηριότητες στην τάξη

Στην τάξη, οι μαθητές μπορούν να αντιμετωπίσουν ένα ευρύ φάσμα δραστηριοτήτων που σχετίζονται με μαθηματικά διανύσματα. Αυτές οι δραστηριότητες στοχεύουν να αναπτύξουν την κατανόησή τους για τις βασικές έννοιες, την ικανότητά τους να επιλύουν προβλήματα και να εφαρμόζουν διανύσματα σε πραγματικές καταστάσεις. Ακολουθούν μερικά παραδείγματα δραστηριοτήτων κατάλληλων για αυτήν την ηλικιακή ομάδα:

1 Εισαγωγή στα διανύσματα:

- Κατανόηση της έννοιας του διανύσματος ως ποσότητα με μήκος και διεύθυνση.
- Αναπαράσταση διανυσμάτων σε ένα επίπεδο χρησιμοποιώντας βέλη ή καρτεσιανές συντεταγμένες

Έννοια διανύσματος:



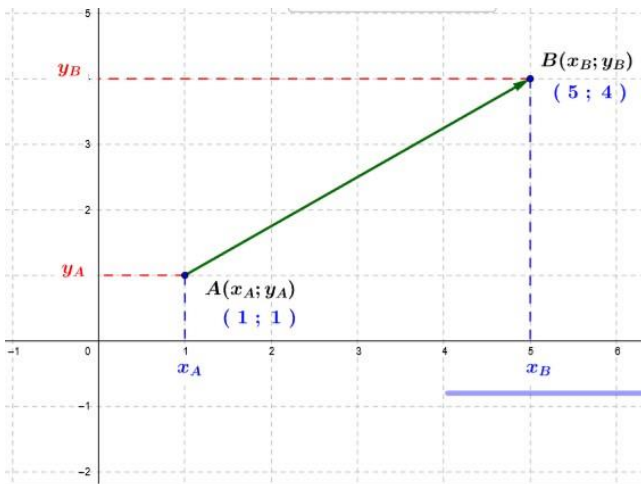
Εδώ, το $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν το ίδιο μέγεθος (ή διάσταση) και την ίδια διεύθυνση.

Ένα διάνυσμα μπορεί να ονομαστεί με ένα μόνο γράμμα

Σημειώνουμε με $\vec{u}$ αυτό το διάνυσμα και γράφουμε: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Σημείωση: Το μηδενικό διάνυσμα είναι αρκετά ασυνήθιστο. Σε αντίθεση με άλλα διανύσματα, δεν έχει ούτε διεύθυνση ούτε καν νόημα! Αλλά χρησιμοποιείται συχνά στους υπολογισμούς.

Καρτεσιανές συντεταγμένες:



Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες ενός διανύσματος AB, χρησιμοποιούμε την παρακάτω εξίσωση:

$$\overrightarrow{AB} = (x = x_B - x_A; y = y_B - y_A)$$

Για το παραπάνω παράδειγμα είναι:

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 1; 4 - 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4; 3)$$

Αυτές οι συντεταγμένες ονομάζονται στοιχεία του διανύσματος, με το x ως τετμημένη και το y ως τεταγμένη. Γράφουμε: $\overrightarrow{AB} = (x, y)$

Οι μαθητές μπορούν να μάθουν να προσθέτουν διανύσματα γραφικά και αναλυτικά.

Μπορούν να χρησιμοποιηθούν οπτικά παραδείγματα και πρακτικά προβλήματα.

Οι μαθητές μπορούν να σχεδιάσουν διανύσματα σε χαρτί και να χρησιμοποιήσουν το τρίγωνο ή τον παραλληλόγραμμο χάρακα για να προσθέσουν τα διανύσματα.

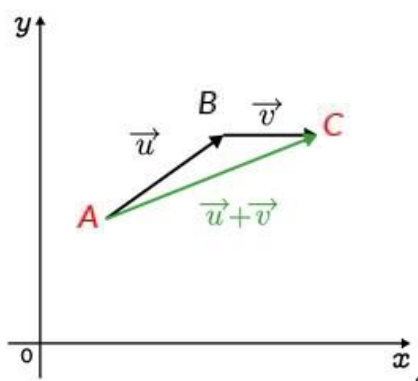
Πρόσθεση διανυσμάτων

Γραφική Μέθοδος:

Η πρόσθεση των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ορίζεται από το ακόλουθο διάνυσμα $\vec{u} + \vec{v}$.

Η μέθοδος τριγώνου σε ένα καρτεσιανό επίπεδο παράγει ένα προκύπτον διάνυσμα σχηματίζοντας ένα τρίγωνο, το οποίο είναι το άθροισμα 2 διανυσμάτων.

Παράδειγμα :



Γενικά, η πρόσθεση δύο διανυσμάτων ορίζεται χρησιμοποιώντας τη σχέση Chasles:

Για όλα τα σημεία στο επίπεδο: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Για να εφαρμοστεί η σχέση Chasles, το τέλος του πρώτου διανύσματος πρέπει να συμπίπτει με την αρχή του δεύτερου. Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα που δεν βρίσκονται σε αυτή τη διαμόρφωση, «μεταφέρουμε το ένα από τα διανύσματα μετά το άλλο».

Αλγεβρική μέθοδος:

Τα διανύσματα μπορούν να προστεθούν χρησιμοποιώντας την αλγεβρική μέθοδο, προσθέτοντας μαζί τα στοιχεία των δύο διανυσμάτων.

Εάν έχετε δύο διανύσματα $\vec{A} = (A_1, A_2)$ και $\vec{B} = (B_1, B_2)$ τότε προσθέτοντας $\vec{A} + \vec{B}$ δίνεται ένα νέο διάνυσμα $\vec{C} = (C_1, C_2)$ όπου κάθε συστατικό προκύπτει προσθέτοντας το αντίστοιχο στοιχείο του $\vec{B}$ και το αντίστοιχο στοιχείο του $\vec{A}$.

Μαθηματικά, αυτό μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_1 + B_1, A_2 + B_2) = (C_1, C_2)$$

Δείτε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα:

Εάν $\vec{A} = (3 ; 2)$ και $\vec{B} = (4 ; 1)$ τότε, $\vec{A} + \vec{B} = (3 + 4 ; 2 + 1)$

$$\vec{C} = (7 ; 3)$$

Επίσης εάν, $\vec{B} + \vec{B} = (4+4 ; 1+1) = (8 ; 2)$ τότε $2\vec{B} = (2B_1 ; 2B_2)$

- **Αφαίρεση διανυσμάτων**

Αλγεβρική μέθοδος:

Τα διανύσματα μπορούν επίσης να αφαιρεθούν στοιχείο προς στοιχείο.

Εάν έχετε δύο διανύσματα $\vec{A} = (A_1, A_2)$ και $\vec{B} = (B_1, B_2)$ τότε αφαιρώντας $\vec{A} - \vec{B}$ δίνεται ένα νέο διάνυσμα $\vec{D} = (D_1, D_2)$ όπου κάθε συστατικό προκύπτει αφαιρώντας το αντίστοιχο συστατικό του $\vec{B}$ όπου κάθε συστατικό προκύπτει αφαιρώντας το αντίστοιχο συστατικό του $\vec{A}$.

Έστω δύο διανύσματα $\vec{A} = (A_1, A_2)$ και $\vec{B} = (B_1, B_2)$ τότε αφαιρώντας $\vec{A} - \vec{B}$ δίνεται νέο διάνυσμα $\vec{D} = (D_1, D_2)$ όπου κάθε συστατικό προκύπτει αφαιρώντας το αντίστοιχο συστατικό του $\vec{B}$ από το αντίστοιχο συστατικό του $\vec{A}$.

Μαθηματικά, αυτό μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\vec{A} = \vec{A} - \vec{B} = (A_1 - B_1, A_2 - B_2) = (\Delta_1, \Delta_2)$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα:

να υποθέσετε ότι $\vec{A} = (3, 1)$ και $\vec{B} = (1, 2)$

Η αφαίρεση $\vec{A} - \vec{B}$ συνεπάγεται:

$$\vec{A} = \vec{A} - \vec{B} = (3 - 1, 1 - 2) = (2, -1)$$

Άρα, $\vec{A} = (2, -1)$

3 Το γινόμενο ενός διανύσματος και ενός πραγματικού αριθμού:

Το γινόμενο ενός διανύσματος και ενός πραγματικού αριθμού είναι μια θεμελιώδης πράξη στη γραμμική άλγεβρα και επιτρέπει την αλλαγή της διάστασης ή της διεύθυνσης ενός διανύσματος. Αυτή η πράξη ονομάζεται συχνά «βαθμωτός πολλαπλασιασμός» επειδή περιλαμβάνει τον πολλαπλασιασμό ενός διανύσματος με έναν βαθμωτό (πραγματικό αριθμό).

Έστω $\vec{V}$ διάνυσμα και c πραγματικός αριθμός. Το γινόμενο του διανύσματος $\vec{V}$ με τον πραγματικό αριθμό c δίνει νέο διάνυσμα $c \cdot \vec{V}$ ή $c\vec{V}$.

Κάθε στοιχείο του προκύπτοντος διανύσματος, προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την αντίστοιχη συνιστώσα του αρχικού διανύσματος με το βαθμωτό αριθμό c .

Μαθηματικά μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

Εάν $\vec{V} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ διάνυσμα, τότε το γινόμενο $c \cdot \vec{V}$ δίνεται από:

$$c \cdot \vec{V} = (c \cdot V_1, c \cdot V_2, \dots, c \cdot V_n)$$



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωση: ένα διάνυσμα μπορεί να υπάρχει σε 3 διαστάσεις καθώς και σε n διαστάσεις!

Αυτό σημαίνει ότι κάθε συνιστώσα του διανύσματος $\vec{V}$ πολλαπλασιάζεται με το βαθμωτό c , παράγοντας ένα νέο διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία είναι c φορές μεγαλύτερες από εκείνες του αρχικού διανύσματος.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα:

Έστω $\vec{A} = (2, -1)$ και $c = 3$. Το γινόμενο $c \cdot \vec{A}$ συνεπάγεται:

$$3 \cdot \vec{A} = (3 \times 2, 3 \times (-1)) = (6, -3)$$

Το διάνυσμα που προκύπτει από το γινόμενο έχει το ίδιο μέγεθος (ή διάσταση) και την ίδια διεύθυνση αλλά είναι 3 φορές μεγαλύτερο.

$$\text{Αλλά: } -3 \cdot \vec{A} = ((-3) \times 2, (-3) \times (-1)) = (-6, +3)$$

Εδώ, ο πολλαπλασιασμός με έναν αρνητικό πραγματικό αριθμό έχει αλλάξει τη διεύθυνση του διανύσματος.

4 Προβλήματα και δράσεις:

Να προσφέρετε ασκήσεις και σχέδια δράσης που επιτρέπουν στους μαθητές να εφαρμόσουν τις έννοιες των διανυσμάτων σε πραγματικές καταστάσεις, όπως βολές, προσομοίωση τροχιών κ.λπ.

Αυτές οι δραστηριότητες βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων, να ενισχύσουν την κατανόησή τους για τα μαθηματικά και να δουν την πρακτική εφαρμογή των διανυσμάτων σε διάφορους τομείς της επιστήμης και της μηχανικής.

Συνδυάζοντας τη θεωρία με τις πρακτικές δραστηριότητες και τα παραδείγματα της πραγματικής ζωής που δείχνουν πώς χρησιμοποιούνται τα διανύσματα στην καθημερινή ζωή και σε διάφορους τομείς των μαθηματικών και της επιστήμης, η έννοια μπορεί να γίνει πιο προσιτή και ενδιαφέρουσα στους μαθητές

Βήμα 3: Εργασίες για το σπίτι και ιδέες ανάπτυξης

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα εργασιών για το σπίτι και δημιουργικών δραστηριοτήτων για εκμάθηση των διανυσμάτων που μπορούν να βοηθήσουν στην ενίσχυση της κατανόησης των διανυσμάτων στα μαθηματικά:

Εργασία για το σπίτι:

1 Προβλήματα μετατόπισης:

Να δώσετε στους μαθητές μια σειρά προβλημάτων μετατόπισης που περιλαμβάνουν τη χρήση διανυσμάτων για τον υπολογισμό αποστάσεων, ταχυτήτων και κατευθύνσεων. Για παράδειγμα, να τους ζητήσετε να υπολογίσουν πόσο χρόνο θα χρειαζόταν για να πετάξει από τη μια πόλη στην άλλη, δεδομένης της ταχύτητας και της κατεύθυνσης του ανέμου.

Πιθανές γενικές οδηγίες:

- **Αρχική θέση:** Να δώσετε την αρχική θέση του σημείου ή του αντικειμένου, που συχνά αντιπροσωπεύεται από ένα αρχικό διάνυσμα $\vec{A}$ ή τις συντεταγμένες του σημείου A.
- **Μετατόπιση:** Να εκφράσετε τη μετατόπιση ως διάνυσμα. Αυτό μπορεί να δοθεί ρητά (για παράδειγμα, $\vec{\Delta} = (3, -2)$ για μετατόπιση 3 μονάδων προς τα δεξιά και 2 μονάδων προς τα κάτω) ή με έμμεσο τρόπο (για παράδειγμα, «μετακίνηση 4 μονάδες βόρεια»).
- **Διανυσματικές πράξεις:** Να χρησιμοποιήσετε διανυσματικές πράξεις, για να υπολογίσετε την τελική θέση. Η νέα θέση προκύπτει προσθέτοντας το διάνυσμα μετατόπισης στην αρχική θέση.
- **Τελικές συντεταγμένες:** Να δώσετε τις τελικές συντεταγμένες του σημείου ή του αντικειμένου μετά την κίνηση.
- **Επιπρόσθετες ερωτήσεις:** Να κάνετε πρόσθετες ερωτήσεις ανάλογα με το πλαίσιο του προβλήματος. Αυτό θα μπορούσε να περιλαμβάνει ερωτήσεις

σχετικά με τη συνολική απόσταση που διανύθηκε, την τελική κατεύθυνση ή άλλες έννοιες που σχετίζονται με ένα ταξίδι.

2 Εξισορρόπηση δυνάμεων:

Να δώσετε στους μαθητές καταστάσεις που περιλαμβάνουν δυνάμεις οι οποίες εφαρμόζονται σε ένα αντικείμενο και να τους ζητήσετε να βρουν το αποτέλεσμα. Μπορούν, επίσης, να εξηγήσουν αν το αντικείμενο βρίσκεται σε ισορροπία.

3 Συντεταγμένες και μετατοπίσεις:

Να ζητήσετε από τους μαθητές να λύσουν προβλήματα μεταφοράς, χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες. Για παράδειγμα, να τους ζητήσετε να περιγράψουν πώς κινείται ένα γεωμετρικό σχήμα όταν υποβάλλεται σε διανύσματα μεταφοράς.

4 Σχέδια εργασίας μοντελοποίησης:

Να ζητήσετε από τους μαθητές να μοντελοποιήσουν μια πραγματική κατάσταση χρησιμοποιώντας διανύσματα. Για παράδειγμα, θα μπορούσαν να μοντελοποιήσουν την κίνηση μιας βολής, ή ακόμα και της τροχιάς μιας μπάλας του γκολφ.

5 Παράδειγμα:

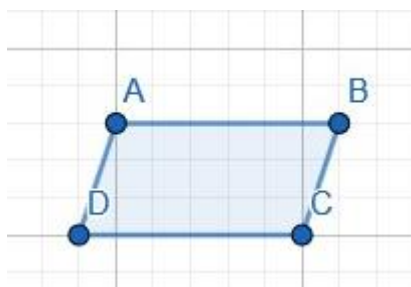
Δίνοντας ένα παραλληλόγραμμο ABCD, να κατασκευάσετε τα σημεία E, F, G και H έτσι ώστε:

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$$

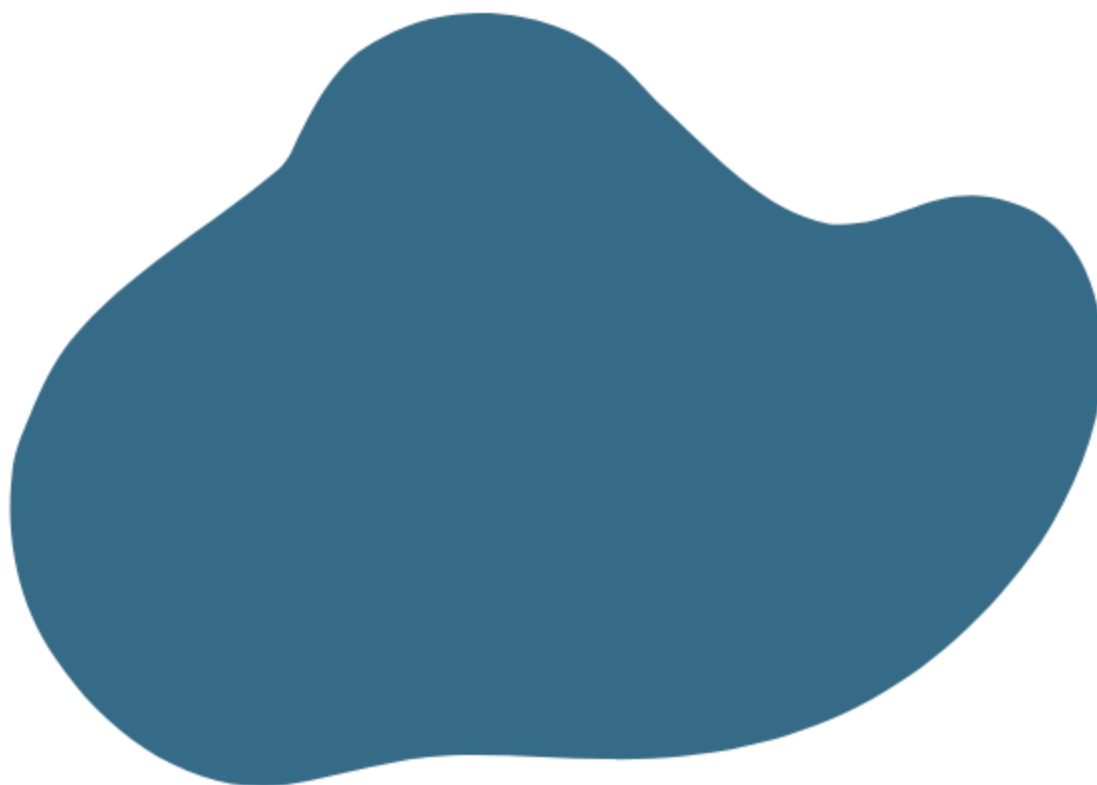
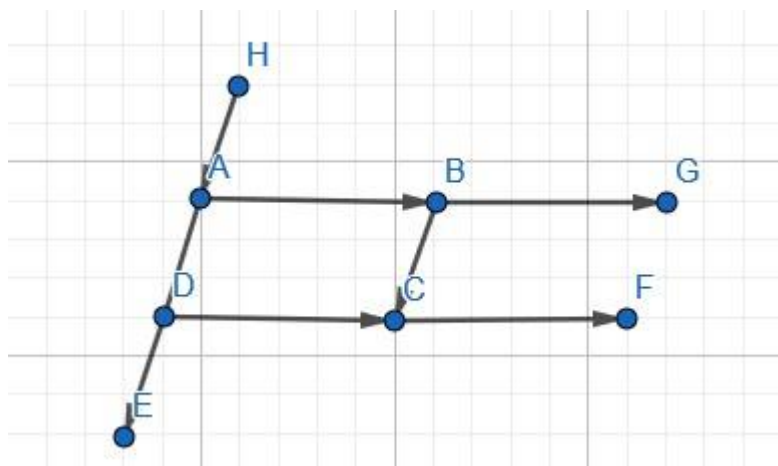
$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$$



Λύση:



Αυτό το έργο έχει χρηματοδοτηθεί με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Αυτή η δημοσίευση αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του συγγραφέα και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Κωδικός έργου: 1-FR01-KA220-SCH-00027771

Μάθετε περισσότερα για το Visit Math στη διεύθυνση:

<https://visitmath.eu>

Αυτό το έργο αδειοδοτείται με την άδεια Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).

