

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Θέμα	Γεωμετρία
Μαθησιακοί στόχοι	Χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος με διαφορετικούς τρόπους.
Ηλικιακή ομάδα	12-16 ετών (προσαρμόσιμο για κάθε χώρα)
Εκτιμώμενη διάρκεια	45 λεπτά
Εργασίες	Ανακάλυψη του Πυθαγόρα και των εφαρμογών του θεωρήματός του.
Σχετικές επισκέψεις	ΜΟΝΤΩΜΠΑΝ - ΑΖΑΝ

Προηγούμενες απαιτούμενες γνώσεις

Βασικές έννοιες της γεωμετρίας

Μήκη και μετρήσεις

Πρόσθεση και αφαίρεση

Τετράγωνο ενός αριθμού

Τετραγωνική ρίζα

Ορισμός και ιδιότητες των τριγώνων

Εφαρμογή γεωμετρικών τύπων

Βήμα -βήμα: η ακολουθία στην αίθουσα

Βήμα 1: Ο Πυθαγόρας και το θεώρημά του

Λίγη ιστορία

Ορισμός του Πυθαγορείου θεωρήματος:

Η ζωή και το έργο του Πυθαγόρα δεν είναι επαρκώς γνωστά. Γεννήθηκε τον 6ο αιώνα π.Χ. στη Σάμο, ένα νησί του Αιγαίου. Μετά από ένα μακρύ ταξίδι μύησης, πιθανότατα εξορίστηκε στον Κροτώνα, στη σημερινή, νότια Ιταλία. Εκεί, ίδρυσε σχολή στην οποία επέβαλε αυστηρούς κανόνες ζωής και πήρε τη μορφή μιας

ισχυρής αδελφότητας. Ο Πυθαγορισμός υπήρξε ένα φιλοσοφικό, θρησκευτικό, ηθικό, αλλά και πολιτικό κίνημα. Λέγεται ότι ο Κύλων, ένας από τους αντιπάλους του Πυθαγόρα, οργάνωσε εξέγερση εναντίον του, σηματοδοτώντας το τέλος της σχολής και διαλύοντας τους οπαδούς της.

Πολύ νωρίς ο Πυθαγόρας έγινε μια θρυλική φιγούρα.

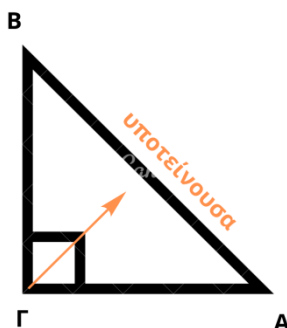
Πριν εστιάσουμε στον ορισμό του θεωρήματος, είναι απαραίτητο πρώτα να θυμηθούμε το ορθογώνιο τρίγωνο, εφόσον η χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος ισχύει μόνο για αυτόν τον τύπο γεωμετρικού σχήματος.

Ορθογώνιο τρίγωνο:

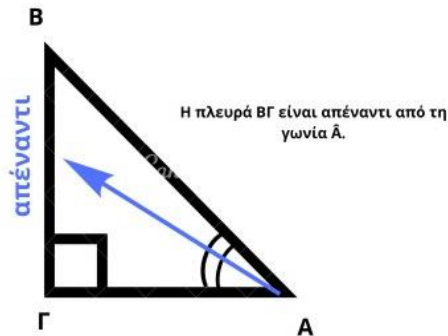
Ορθογώνιο τρίγωνο είναι ένα τρίγωνο που περιέχει μία ορθή γωνία, δηλαδή γωνία 90 μοιρών (90°).

Οι διαφορετικές πλευρές ενός τριγώνου έχουν συγκεκριμένα ονόματα:

- Η υποτείνουσα είναι η πλευρά απέναντι από την ορθή γωνία (90°). Είναι η μεγαλύτερη από τις τρεις πλευρές



- Η απέναντι πλευρά είναι μία από τις πλευρές που περιέχει την ορθή γωνία και είναι απέναντι σε καθεμία από τις άλλες δύο οξείες γωνίες.



- Η προσκείμενη κάθετη πλευρά είναι μία από τις πλευρές που περιέχει οξεία γωνία, αλλά δεν είναι η υποτείνουσα.



Στην περίπτωση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, το κύριο στοιχείο είναι η υποτείνουσα.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

Ο ορισμός του Πυθαγόρειου θεωρήματος είναι ο εξής:

Το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών.

Μπορεί να συνοψιστεί στον ακόλουθο τύπο:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

όπου τα α , β και γ αντιπροσωπεύουν τα μήκη των πλευρών στο ορθογώνιο τρίγωνο.

Αυτό το θεώρημα σας επιτρέπει να υπολογίσετε το μήκος μιας πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου όταν είναι γνωστά τα μήκη δύο άλλων πλευρών.

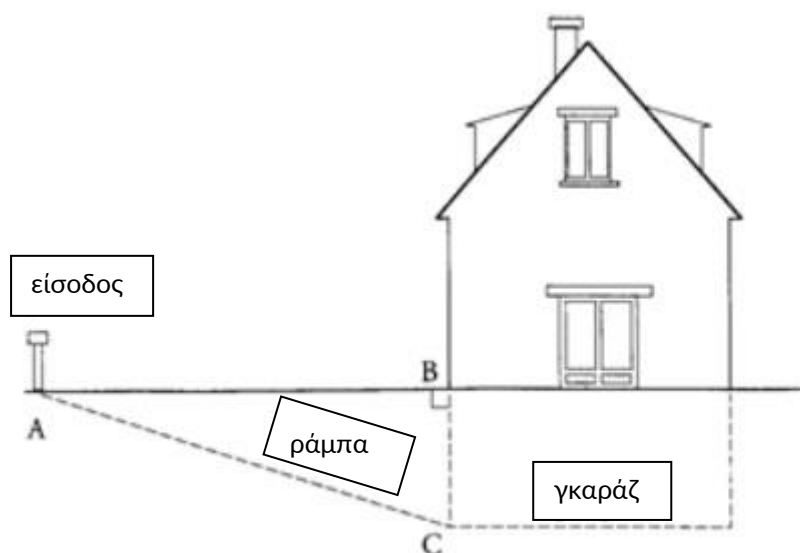
Βήμα 2: Δραστηριότητες στην τάξη

Παράδειγμα άσκησης που πρέπει να κάνετε για να κατανοήσετε τη σχέση μεταξύ του Πυθαγόρειου και της πραγματικής ζωής

Για να κάνετε τις ασκήσεις πιο συγκεκριμένες, μπορείτε να τις συσχετίσετε με καταστάσεις της πραγματικής ζωής. Για παράδειγμα:

Ο Λουί ζει σε ένα σπίτι με γκαράζ 2,25 μέτρα κάτω από το έδαφος. Για να φτάσει εκεί, πρέπει να διανύσει μια ράμπα μήκους 10,25 μέτρων.

Ποια είναι η απόσταση μεταξύ της πύλης και της εισόδου του σπιτιού του;





Υπολογίστε τη μία πλευρά του ορθογώνιου τριγώνου με τον τύπο του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

Παράδειγμα

Θεωρήστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με τη μία πλευρά να έχει μέγεθος 6 cm και την υποτείνουσα 10 cm.

Μπορείτε να υπολογίσετε το μήκος της τελευταίας πλευράς;

Έστω "α" το μήκος της τελευταίας πλευράς.

Χρησιμοποιήστε τον τύπο από το θεώρημα για να κάνετε τον υπολογισμό.

$$10^2 = \alpha^2 + 6^2$$

$$100 = \alpha^2 + 36$$

$$\alpha^2 = 100 - 36$$

$$\alpha^2 = 64$$

$$\alpha = 8$$

Έλεγχος ότι ένα τρίγωνο είναι όντως ορθογώνιο

Εφόσον αυτό το θεώρημα ισχύει μόνο για το ορθογώνιο τρίγωνο, μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε ως επαλήθευση. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται τριγωνική αντιστροφή, με την οποία μπορεί να γίνει έλεγχος αν ένα τρίγωνο είναι όντως ορθογώνιο.

Το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος δηλώνει ότι αν τα μήκη α, β και γ ενός τριγώνου επαληθεύουν την ισότητα $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, τότε είναι πράγματι ένα ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου γ είναι η υποτείνουσα.

Εφόσον γνωρίζουμε ότι η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά, πρέπει να προσθέσουμε τα τετράγωνα των δύο μικρότερων πλευρών και να επαληθεύσουμε ότι αυτό το άθροισμα ισούται με το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς (η υποτείνουσα).

Παράδειγμα

Σκεφτείτε ένα τρίγωνο του οποίου τα μήκη είναι 3, 4 και 5.

Μπορείτε να αποδείξετε ότι είναι ή δεν είναι ορθογώνιο τρίγωνο;

Για να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

Αν εφαρμόσουμε τον τύπο, έχουμε:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Ας αναλύσουμε αυτόν τον υπολογισμό:

$$9 + 16 = 5^2$$

$$25 = 5^2$$

$$25 = 25$$

Έτσι, $3^2 + 4^2 = 5^2$ και με το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος, είναι πράγματι ορθογώνιο τρίγωνο.

Βήμα 3: Το σχοινί με τους 13 κόμπους

Το σχοινί με τους δεκατρείς κόμπους, γνωστό και ως «Σχοινί των Δρυίδων» ή «Αιγυπτιακό σχοινί», ήταν ένα όργανο που χρησιμοποιούνταν στην αρχαία Αίγυπτο. Αντιπροσώπευε ένα σημαντικό εργαλείο για τους οικοδόμους του Μεσαίωνα, οι οποίοι το χρησιμοποιούσαν για να μεταδίδουν κατασκευαστικές οδηγίες, κατανοητές από εργάτες που δεν ήταν εξοικειωμένοι με τη γεωμετρία και τους υπολογισμούς. Έτσι, το εργαλείο αυτό χρησιμοποιήθηκε για την κοινοποίηση των κατασκευαστικών σχεδίων στους εργαζόμενους, διευκολύνοντας έτσι την ολοκλήρωση πολύπλοκων αρχιτεκτονικών έργων.

Πρόκειται για ένα σχοινί με 13 κόμβους, στο οποίο δημιουργούνται 12 κανονικά διαστήματα ίσου μήκους. Κάθε κόμπος λειτουργεί ως σημάδι στο σχοινί, οριοθετώντας ένα κενό ανάμεσα σε κάθε εκατοστό, παρόμοιο με ένα σημάδι σε ένα χάρακα. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι ο κόμπος δεν είναι μια μέτρηση μήκους από μόνη της, αλλά μάλλον μια αναφορά, ένα είδος βαθμονόμησης στο σχοινί.



Αυτό το εργαλείο φαίνεται να επιτρέπει τη διδασκαλία πολλών μαθηματικών εννοιών.

Ένα εργαλείο κινητοποίησης για την εκπαίδευση:

Το ενδιαφέρον για το εργαλείο του «σχοινιού των δεκατριών κόμπων» προκαλείται από πολλές παραμέτρους:

- το κίνητρο των δασκάλων και των μαθητών, που είναι φιλομαθείς και ενδιαφέρονται για αυτό το αρχαίο εργαλείο
- τη δυνατότητα σύνδεσης της γνώσης στον πραγματικό χώρο και της μοντελοποίησης μέσω της γεωμετρίας
- τη διαφοροποίηση μεταξύ σχεδίου και σχήματος η οποία είναι θεμελιώδης για τη γεωμετρία.

Άλλες προεκτάσεις είναι δυνατές, ιδίως στην ανάπτυξη γνώσεων που συνδέονται με τον κύκλο.

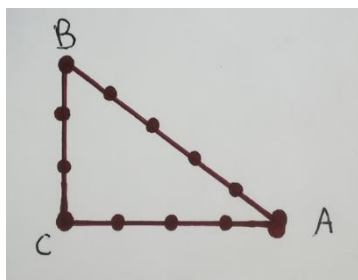
Η ιστορική πτυχή είναι επίσης σημαντική, επιτρέποντας στους μαθητές να κατανοήσουν την εξελικτική πορεία της ανάπτυξης της γνώσης, ιδιαίτερα σχετικά με τα εργαλεία που είναι διαθέσιμα σε έναν πληθυσμό, σε μια δεδομένη στιγμή της ιστορίας του.

Το σχοινί 13 κόμπων είναι ένα εργαλείο που δημιουργεί μάθηση του οποίου οι πολλαπλές χρήσεις επιτρέπουν στους μαθητές να αφομοιώσουν έννοιες:

- στον τομέα της γεωμετρίας, είναι ένα ισχυρό εργαλείο: το επίπεδο σχήμα (ορθογώνιο τρίγωνο, ισοσκελές τρίγωνο, ισόπλευρο τρίγωνο, τετράγωνο, παραλληλόγραμμο, ρόμβος μπορεί να υλοποιηθεί συγκεκριμένα με τη χορδή), το σχήμα σε διάστημα, τη στοίχιση, το τμήμα, την ευθεία, τον κύκλο, την ορθογωνιότητα, τον παραλληλισμό, τα πολύγωνα, τη συμμετρία, τη μέση.

Το σχοινί σας επιτρέπει να οπτικοποιήσετε το τετράγωνο ή το διαμάντι με την επανάληψη 4 όμοιων αριθμών ($3+3+3+3$), τα ορθογώνια ή τα παραλληλόγραμμα με την επανάληψη ενός ζεύγους αριθμών ($1+5+1+5$ και $2+4+2+4$), τα τραπεζοειδή ισοσκελή κατά τον ίδιο αριθμό σε δύο μη διαδοχικές θέσεις ($1+3+5+3$ ή $2+3+2+5$), το ισόπλευρο τρίγωνο ($4+4+4$) ή το ισοσκελές τρίγωνο ($2+5+5$), το οποίο έχει πέντε διαστήματα στις δύο πλευρές του και δύο διαστήματα στη βάση του ή το ορθογώνιο τρίγωνο ($3+4+5$) με την ορθή του γωνία και έτσι ανακαλύπτετε τις ιδιότητες που σας επιτρέπουν να διαφοροποιήσετε τα σχήματα ανάμεσά τους.

Παράδειγμα ορθογωνίου τριγώνου:



- στον τομέα των μεγεθών και των μετρήσεων: μήκος, περίμετρος, εμβαδόν, ύπαρξη πολυγώνου δεδομένων διαστάσεων (τριγωνική ανισότητα)
- στον ψηφιακό τομέα: προσθετική ανάλυση του αριθμού 12, σύγκριση αριθμών κ.λπ. Το σχοινί 13 κόμπων σας επιτρέπει να προσθέτετε, να αφαιρείτε, να πολλαπλασιάζετε και να διαιρείτε χωρίς υπολογισμό! Για παράδειγμα, διπλώνοντας το σχοινί, ώστε να έχουμε σε κάθε πτυχή τέσσερα διαστήματα, θα μας επιτρέψει να παρατηρήσουμε ότι τρεις πτυχές επί τέσσερα διαστήματα = 12 διαστήματα. Είναι, επίσης, μια άλλη αφορμή για να δουλέψουμε στα κλάσματα.

Βήμα 4: Εργασίες για το σπίτι και ιδέες ανάπτυξης

Ασκήσεις που πρέπει να κάνετε για να κατανοήσετε τη σχέση του σχοινιού 13 κόμπων / Πυθαγόρειο θεώρημα

Γενικά: Πώς αποδεικνύετε το Πυθαγόρειο θεώρημα με ένα σχοινί 13 κόμπων;

Χρησιμοποιούμε ένα σχοινί με δεκατρείς κόμπους σε ίση απόσταση, επομένως με δώδεκα ίδια διαστήματα. Ένα άτομο κρατά τους δύο ακραίους κόμπους, ένα άλλο κρατά τον 4ο κόμπο και ένα τρίτο τον 7ο κόμπο. Τεντώνοντας το σχοινί, αποκτούν ένα τέλειο ορθογώνιο τρίγωνο. Γιατί; Επειδή η μία πλευρά έχει 3 μονάδες μέτρησης (διαστήματα), η άλλη 4 και η υποτείνουσα έχει 5.

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Το Πυθαγόρειο θεώρημα όντως επαληθεύεται. Το τρίγωνο που προκύπτει είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο, περιέχοντας ορθή γωνία.

Παραδείγματα οδηγιών:

1. Οι Αιγύπτιοι ήξεραν πώς να ελέγχουν ότι οι γωνίες ήταν σωστές, χρησιμοποιώντας ένα σχοινί με 13 ισομήκη διαστήματα μεταξύ των κόμπων. Εξηγήστε γιατί και πώς μπορούμε να ελέγξουμε ότι μια γωνία είναι ορθή, χρησιμοποιώντας ένα σχοινί 13 κόμπων.
2. Φανταστείτε ένα σχοινί με 13 κόμπους τεντωμένο ανάμεσα σε δύο δέντρα και σχηματίζοντας έτσι ένα ορθογώνιο τρίγωνο με το έδαφος. Εάν η χορδή έχει μέγεθος 15 μονάδες και μια από τις πλευρές, δίπλα στη δεξιά γωνία της χορδής, έχει 9 μονάδες, να προσδιορίσετε το μήκος της πλευράς απέναντι από τη δεξιά γωνία, χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα.
3. Ένας εξερευνητής κινείται μέσα στη ζούγκλα χρησιμοποιώντας ένα σχοινί 13 κόμπων ως οδηγό. Αφού περπάτησε 8 μονάδες ανατολικά και μετά 5 μονάδες βόρεια, πόσο μακριά περπάτησε σε ευθεία γραμμή από την αφετηρία του;

Αυτές οι ασκήσεις σας επιτρέπουν να εφαρμόσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα χρησιμοποιώντας το σχοινί των 13 κόμπων σε διαφορετικά περιβάλλοντα. Μπορείτε να λύσετε αυτά τα προβλήματα προσδιορίζοντας τις πλευρές ενός τριγώνου, εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορθογωνίων τριγώνων.

Άλλες δραστηριότητες που μπορούν να ζητηθούν από τους μαθητές:

- να φτιάξετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο
- να φτιάξετε ένα ισοσκελές τρίγωνο
- να φτιάξετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο
- να φτιάξετε ένα τετράγωνο
- να φτιάξετε ένα ορθογώνιο

Αυτό το έργο έχει χρηματοδοτηθεί με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Αυτή η δημοσίευση αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του συγγραφέα και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Κωδικός έργου: 1-FR01-KA220-SCH-00027771

Μάθετε περισσότερα για το Visit Math στη διεύθυνση:

<https://visitmath.eu>

Αυτό το έργο αδειοδοτείται με την άδεια Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).

