

Άλγεβρα

Θέμα	Εξίσωση με 1 ή 2 μεταβλητές
Μαθησιακοί στόχοι	Μάθετε πώς να αναφέρετε σημεία σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, επίλυση εξισώσεων σε δύο μεταβλητές. Μάθετε πώς να επιλύετε προβλήματα, που αφορούν μέγιστο / ελάχιστο, με τετραγωνικές συναρτήσεις. Μάθετε πώς να αποκτήσετε τις εξισώσεις των κωνικών από δεδομένα και αντίστροφα.
Ηλικιακή ομάδα	14-18 ετών (θα προσαρμοστεί σε κάθε χώρα)
Εκτιμώμενη διάρκεια	2 ώρες
Δραστηριότητες	Αναζητήστε ειδικά σημεία ελλείψεων και παραβολών που λαμβάνονται από πραγματικές καταστάσεις
Σχετικές επισκέψεις	Πίζα, Lucca

Απαιτούμενες προηγούμενες γνώσεις

Γνωρίστε το καρτεσιανό επίπεδο ως σύστημα αναφοράς συντεταγμένων. Μάθετε πώς να αναγνωρίζετε τον τύπο του κωνικού όταν τίθεται σε κανονικό σχήμα.

Βήμα προς βήμα: η ακολουθία στην τάξη

Βήμα 1: Εισαγωγή στο θέμα

Οι εξισώσεις με δύο αγνώστους είναι ένα θέμα που αφορά από την Ανάλυση έως τη Γεωμετρία και την Άλγεβρα. Είναι εξισώσεις με αγνώστους x και y και οι λύσεις είναι όλες με διατεταγμένα ζεύγη $(x;y)$ που κάνουν την ισότητα αληθινή. Το σύνολο αυτών των λύσεων αντιστοιχεί σε μια γεωμετρική θέση στο καρτεσιανό επίπεδο.

Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με την παραβολή και την έλλειψη.

Σύντομη παρουσίαση των στοιχείων κληρονομιάς σε αυτή τη σειρά

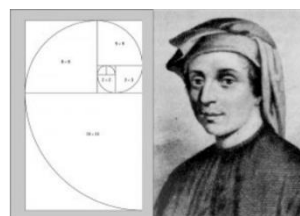
Οι εξισώσεις εισήχθησαν για πρώτη φορά τον 9ο αιώνα μ.Χ. από τον Πέρση μαθηματικό αστρονόμο Al-Khwarizmi για την επίλυση προβλημάτων εμπορικής ή κληρονομικής διαίρεσης.



Al-Khwarizmi-O
πατέρας του
Algebra-

Η κλασική άλγεβρα, ωστόσο, γεννήθηκε και αναπτύχθηκε στον αραβικό κόσμο. Στην Ιταλία, έπρεπε να περιμένουμε μέχρι το

11ος αιώνας, όταν προέκυψαν οι σχολές Άβακα, στις οποίες ο Leonardo Pisano, γνωστός ως Fibonacci, συνέβαλε σημαντικά.



Leonardo Pisano-La tecnica
della scuola

Αργότερα, στην Αναγέννηση, υπήρχαν μεγάλοι αλγεβριστές όπως ο Pacioli, ο Cardano και ο Bombelli.

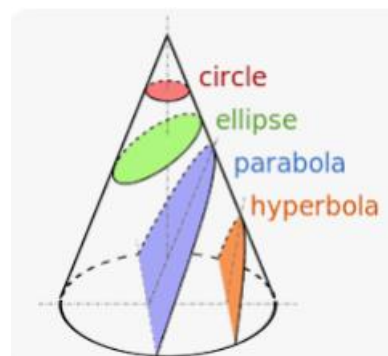


Καρτέσιος-
Shutterstock

Αργότερα, τον 17ο αιώνα, ο συμβολισμός, τον οποίο εξακολουθούμε να γνωρίζουμε και να χρησιμοποιούμε σήμερα, εισήχθη από τον Descartes. Ήταν ακριβώς από τότε, χάρη σε αυτόν και τον Fermat, που η άλγεβρα συγχωνεύτηκε με τη γεωμετρία. Το 1637 ο Καρτέσιος εισήγαγε την αναλυτική γεωμετρία και δήλωσε ότι οι εξισώσεις 2ου βαθμού ήταν ακριβώς τα κωνικά που μελετήθηκαν από τον Απολλώνιο (262-190 π.Χ.). Με την εισαγωγή των νέων αλγεβρικών μεθόδων που συνδέονται με το καρτεσιανό επίπεδο, ο Descartes και ο Fermat κατάφεραν να λύσουν τα προβλήματα που αντιμετώπισαν με απλούστερο τρόπο και να επαληθεύσουν τις ιδιότητες των κωνικών. Στην πραγματικότητα οι τελευταίοι είχαν προηγουμένως ανακαλυφθεί από τον Menaechmus (380-320 π.Χ.), ενώ προσπαθούσε να λύσει το πρόβλημα της αντιγραφής του κύβου.

Ο Menaechmus ήταν ο πρώτος που απέδειξε ότι τα κωνικά θα μπορούσαν να ληφθούν τέμνοντας έναν κώνο με ένα επίπεδο (εξ ου και το όνομα conics). Αργότερα ο Απολλώνιος απέδειξε ότι μπορούσαν επίσης να ληφθούν από έναν κώνο διπλής

κλίσης, τέμνοντάς τον με ένα επίπεδο του οποίου η κλίση ποικίλλει. Οφείλουμε επίσης τα ονόματα της παραβολής, της έλλειψης και της υπερβολής σε αυτόν. Μετά τον Απολλώνιο η μελέτη των κωνικών εγκαταλείφθηκε.



Εμφανίστηκαν ξανά κατά τη διάρκεια της Αναγέννησης, στην τέχνη, με προοπτική, και στη συνέχεια στο μπαρόκ, όπου οι καμπύλες γραμμές (ελλείψεις) πήραν προνομιακή θέση.

Συνδέσεις μεταξύ αυτών των στοιχείων και μαθηματικών θεμάτων

Τα κωνικά είναι τεσσάρων τύπων: παραβολή, περιφέρεια, έλλειψη και υπερβολή. Δύο σημαντικές εφαρμογές σε πραγματικές καταστάσεις, για την εύρεση μέγιστου και ελάχιστου ή για ακουστικά προβλήματα, αφορούν συγκεκριμένα παραβολές και ελλείψεις στις οποίες θα επικεντρωθούμε.

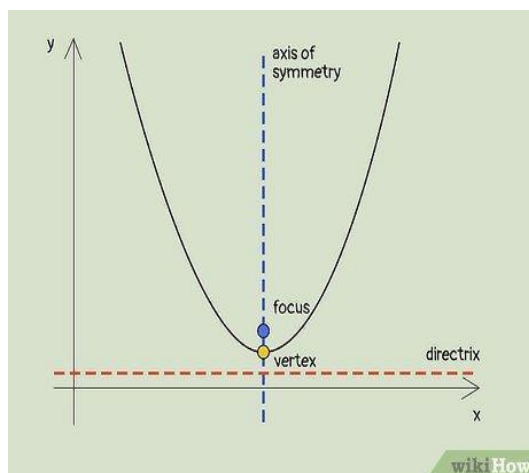
Η παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων στο επίπεδο P σε ίση απόσταση από ένα δεδομένο σημείο, που ονομάζεται εστίαση, F , και από μια δεδομένη ευθεία γραμμή, r , που ονομάζεται directrix.



Από τον ορισμό, μπορούμε να λάβουμε, με μερικά αλγεβρικά βήματα, την εξίσωση της παραβολής:

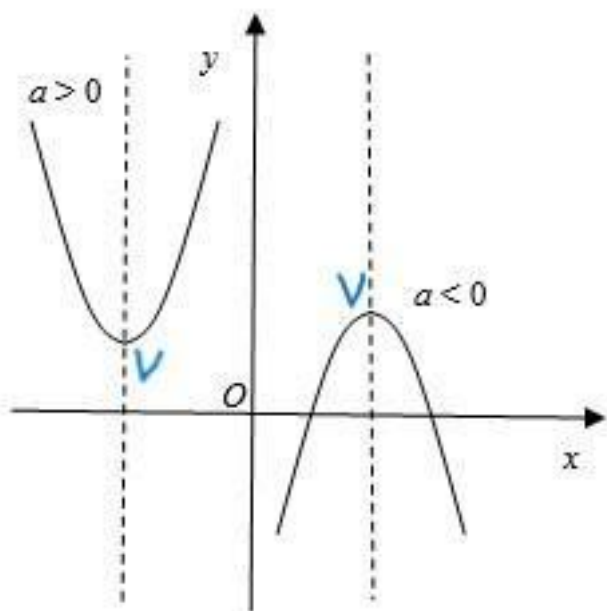
$$y = ax^2 + bx + c$$

Οι παραβολές με αυτή την εξίσωση έχουν τον άξονα συμμετρίας παράλληλο με τον άξονα y :



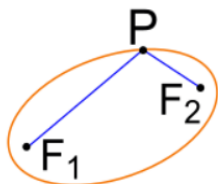
Εάν $a > 0$ η κοιλότητα βλέπει προς τα πάνω και η κορυφή V είναι το χαμηλότερο σημείο.

Εάν $a < 0$ η κοιλότητα βλέπει προς τα κάτω και η κορυφή V είναι το υψηλότερο σημείο.



$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$$

Η έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P στο επίπεδο έτσι ώστε το άθροισμα των αποστάσεων αυτών των σημείων από δύο σταθερά σημεία, που ονομάζονται εστίες, F_1 και F_2 , να είναι σταθερό.



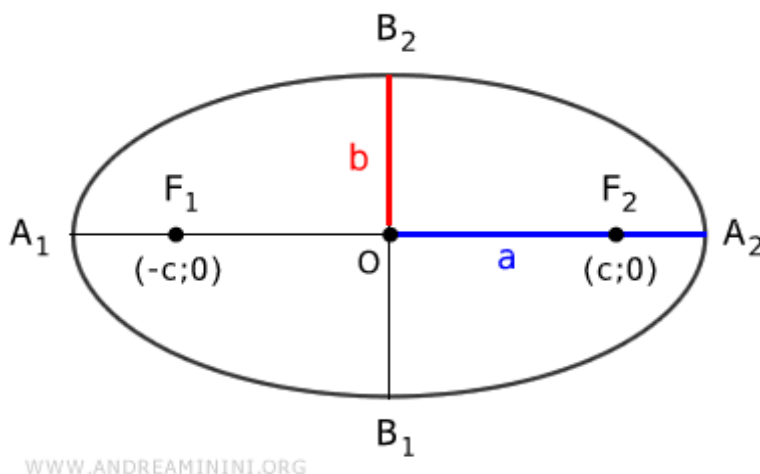
$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{σταθερός}$$

Από τον ορισμό, με μερικά αλγεβρικά βήματα, φτάνουμε στην εξίσωση της έλλειψης σε κανονική μορφή:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

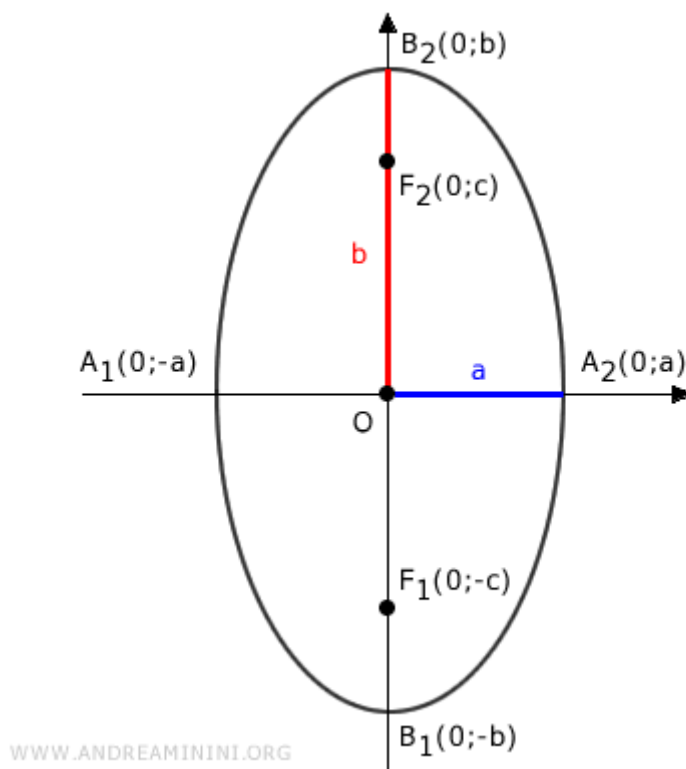
A και B είναι τα μήκη των ημιαξόνων.

Εάν $a > b$, οι εστίες βρίσκονται στον άξονα x :



$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Εάν $a < b$, οι εστίες βρίσκονται στον άξονα y :



$$c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

Βήμα 2: Δραστηριότητες στην τάξη

Άσκηση 1

Πρόβλημα: Έχεις μόνο 320 μέτρα φράχτη και θέλεις να περιφράξεις όσο περισσότερη γη μπορείς. Το περίβλημα πρέπει να είναι ορθογώνιο. Πόσο μήκος πρέπει να έχουν οι πλευρές αυτού του ορθογώνιου;

Αν πάρετε $L_1=10\text{m}$ και $L_2=150\text{m}$, το ορθογώνιο θα έχει εμβαδόν...

Αν πάρετε $L_1=20\text{m}$ και $L_2=140\text{m}$, το ορθογώνιο θα έχει εμβαδόν...

Προσοχή, θυμηθείτε ότι η περίμετρος πρέπει να είναι 320m: $2L_1+2L_2=320\text{m}$, επομένως $L_1+L_2=160\text{m}$.

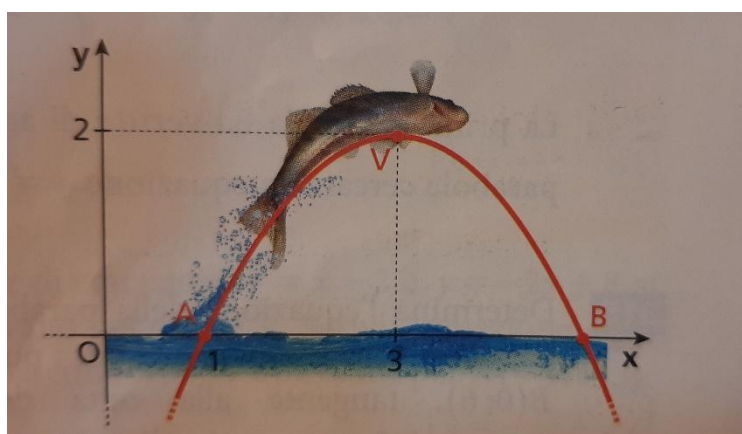
Μετά από δοκιμή και σφάλμα, προσπαθήστε να λύσετε το ίδιο πρόβλημα χρησιμοποιώντας το x ως άγνωστο για τη μία πλευρά (και κατά συνέπεια το άλλο θα είναι $160-x$) και αποκτώντας την παραβολή που σχετίζεται με τον τύπο περιοχής: $y =$

$x(160-x)$. Ποιο ιδιαίτερο σημείο σε αυτή την παραβολή αντιστοιχεί στη λύση του προβλήματος;

Άσκηση 2

Παρατηρήστε την τροχιά των ψαριών. Αναγνωρίζετε κάποια συγκεκριμένη καμπύλη; Τι αντιπροσωπεύει το υψηλότερο σημείο αυτής της καμπύλης; Προσδιορίστε τις συντεταγμένες αυτού του σημείου. Στη συνέχεια, βρείτε την τετμημένη του σημείου Β, όπου το ψάρι εισέρχεται ξανά στο νερό.

*Πρόκληση: προσπάθησε να προσδιορίσεις την εξίσωση της καμπύλης που περιγράφει την τροχιά του ψαριού.

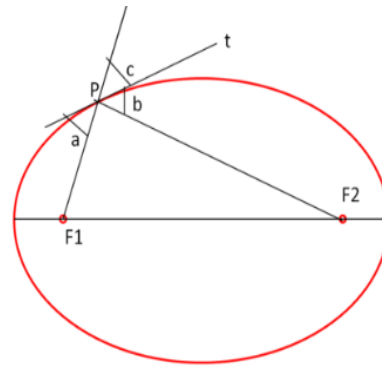


Άσκηση 3

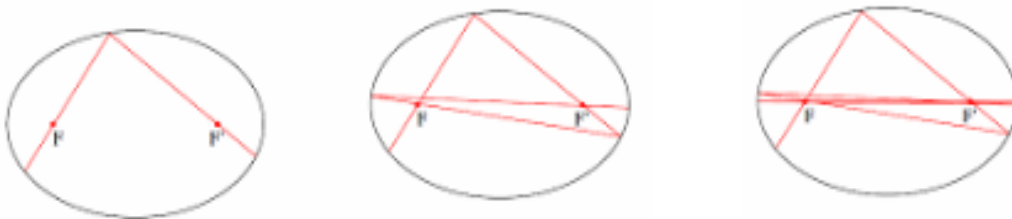
Προσπαθήστε να κατασκευάσετε μια έλλειψη με βάση τα χαρακτηριστικά του γεωμετρικού τόπου. Πάρτε ένα φύλλο χαρτί, τρυπήστε το σε δύο σημεία - που θα αντιστοιχούν στις δύο εστίες - και κόψτε ένα κομμάτι σπάγκο του μήκους που θέλετε. Συνδέστε το νήμα στα δύο σημεία, ασφαρίζοντάς το στο πίσω μέρος με την κολλητική ταινία και, στη συνέχεια, με ένα μολύβι, τραβώντας τη χορδή μέχρι να τεντωθεί, τραβήξτε την έλλειψη στο φύλλο. Στον παρακάτω σύνδεσμο μπορείτε να παρακολουθήσετε ένα βίντεο που το δείχνει:

<https://www.youtube.com/shorts/nKqfHrYFne8>

Εντοπίστε μια τροχιά μιας μπάλας μπιλιάρδου στην τραβηγμένη έλλειψη και υπολογίστε την τροχιά της αναπήδησης στην έλλειψη, γνωρίζοντας ότι η αναπήδηση έχει την ίδια γωνία σε σχέση με την κάθετη της τροχιάς άφιξης.



Πού φτάνουν οι μπάλες που ξεκινούν από μια εστίαση, μετά την πρώτη αναπήδηση; Χρησιμοποιήστε το μοιρογνωμόνιο για να υπολογίσετε με ακρίβεια τη γωνία.



Άσκηση 4

Σε αυτή τη φωτογραφία του Κολοσσαίου μπορείτε να δείτε την ελλειπτική δομή. Το μέγιστο μήκος (κύριος άξονας) του αμφιθεάτρου είναι περίπου 188μ., ενώ το μέγιστο πλάτος του (δευτερεύων άξονας) είναι περίπου 156μ. Λαμβάνεται η εξίσωση της έλλειψης που αντιπροσωπεύει το εξωτερικό περίγραμμα του κτιρίου, επιλέγοντας το κέντρο της έλλειψης ως την αρχή του συστήματος αναφοράς και την ευθεία γραμμή που περιέχει τον κύριο άξονα ως άξονα x. Πού βρίσκονται οι εστίες σε αυτό το



Bergamini-Barozzi-Trifone-Lineamenti di matematica.azzurro-vol.3

Βήμα 3: Εργασίες για το σπίτι και ιδέες ανάπτυξης

Άσκηση 1

Ένα νήμα μήκους 20cm κόβεται σε δύο μέρη. Με τα δύο κομμάτια που λαμβάνονται, σχηματίζονται δύο τετράγωνα. Σε ποιο σημείο πρέπει να κόψουμε το νήμα έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώνων να είναι ελάχιστο;

Άσκηση 2

Ένα παράθυρο σχηματίζεται από ένα ορθογώνιο που ξεπερνιέται από ένα ημικύκλιο, με τη διάμετρο να συμπίπτει με τη μία πλευρά του ορθογωνίου. Εάν η περίμετρος του παραθύρου είναι 24m, καθορίστε την ακτίνα του ημικυκλίου έτσι ώστε το φως που εισέρχεται από το παράθυρο να είναι μέγιστο.



VISIT MATH

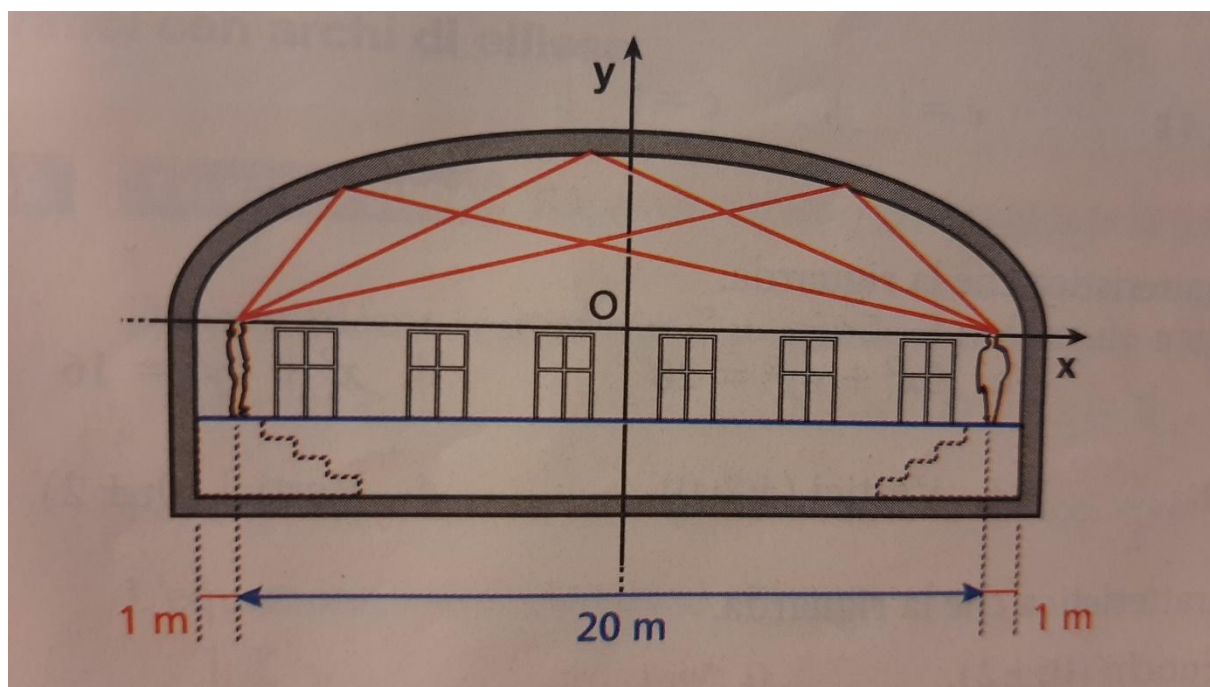
Άσκηση 3



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ένας ελλειψοειδής θολωτός θάλαμος έχει την ακουστική ιδιότητα ότι, αν δύο άνθρωποι τοποθετηθούν στις εστίες της έλλειψης και μιλήσουν με χαμηλή φωνή, με την πλάτη τους γυρισμένη, μπορούν να ακούσουν ο ένας τον άλλον πολύ καλά, σαν να ήταν κοντά. Αυτό οφείλεται στην αντανάκλαση των ακουστικών κυμάτων στους τοίχους του θόλου. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε δύο άτομα με τα κεφάλια τους στις εστίες της έλλειψης. Βρείτε την εξίσωση.

(Από το σχέδιο μπορείτε να λάβετε το μήκος του κύριου άξονα, $2a$, και την εστιακή απόσταση, $2c$. Πώς μπορείτε να πάρετε b ;))



Bergamini-Barozzi-Trifone-Lineamenti di matematica.azzurro-vol.3

Υλικό που απαιτείται για την ξενάγηση

Σπάγκος, φύλλα, ψαλίδι, ταινία, μοιρογνώνιο, μολύβι.

Αυτό το έργο έχει χρηματοδοτηθεί με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Αυτή η δημοσίευση αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του συγγραφέα και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Κωδικός έργου: 1-FR01-KA220-SCH-00027771

Μάθετε περισσότερα για το Visit Math στη διεύθυνση:

<https://visitmath.eu>

Αυτό το έργο αδειοδοτείται με την άδεια Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).

