

Γεωμετρία

Θέμα	Κέντρο μάζας
Μαθησιακοί στόχοι	Κατανόηση του κέντρου μάζας
Ηλικιακή ομάδα	13-18 ετών (προσαρμόσιμο για κάθε χώρα)
Εκτιμώμενη διάρκεια	2 ώρες
Εργασίες	Δυνατότητα υπολογισμού του κέντρου μάζας με τη χρήση τύπων
Σχετικές επισκέψεις	Αγρίνιο

Προηγούμενες απαιτούμενες γνώσεις

Κατανόηση επιπέδων και σημείων στη γεωμετρία

Β;hma – βήμα: Η ακολουθία στην τάξη

Βήμα1: Εισαγωγή στο θέμα

Γνωρίζετε το παιχνίδι με το πουλί στο οποίο αυτό πρέπει να ισορροπήσει με το ράμφος του στο άκρο του δακτύλου; Όταν οδηγείτε ένα όχημα, γιατί το σώμα του οδηγού περιστρέφεται απότομα όταν πλησιάζει σε μια γωνία;

Η απάντηση είναι «**το κέντρο μάζας**».

Το κέντρο μάζας είναι μια θέση που ορίζεται σε σχέση με ένα αντικείμενο ή ένα σύστημα αντικειμένων. Είναι η μέση θέση όλων των τμημάτων του συστήματος, σταθμισμένη ανάλογα με τη μάζα τους.

Κοιτάξτε το παρελθόν. Το κέντρο μάζας έχει, πραγματικά, μια μακρά και πλούσια ιστορία στη φυσική και στα μαθηματικά. Ο Αρχιμήδης, ο αρχαίος Έλληνας μαθηματικός, θεωρήθηκε ότι έθεσε τα θεμέλια για την έννοια του κέντρου μάζας. Διατύπωσε μια αρχή, δηλώνοντας ότι «ίσα βάρη σε ίσες αποστάσεις βρίσκονται σε ισορροπία». Αυτή η αρχή είναι θεμελιώδης για την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο τα αντικείμενα ισορροπούν γύρω από

το κέντρο μάζας τους. Επιπλέον, πολλοί αξιόλογοι μαθηματικοί και επιστήμονες μετά από αυτούς συνέβαλαν στην έρευνα του πεδίου.



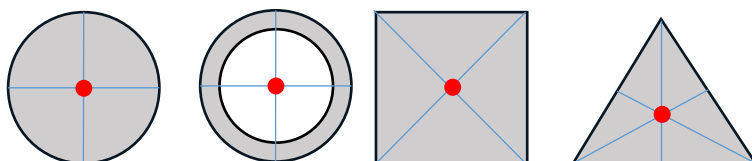
Πηγή: <https://rb.gy/0mj4oz>

1. Ένα πουλί που ισορροπεί με το ράμφος του στην άκρη του δακτύλου

Σύνδεση μεταξύ αυτών των στοιχείων και του μαθηματικού αντικειμένου
Μαθηματικά, μπορεί να οριστεί ως ο σταθμισμένος μέσος όρος των θέσεων όλων των σωματιδίων:

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M} \quad y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{M} \quad z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{M}$$

Η γεωμετρία ενός αντικειμένου, μαζί με την κατανομή της μάζας μέσα σε αυτό, καθορίζει τη θέση του κέντρου μάζας του. Εάν το αντικείμενο έχει ομοιόμορφη κατανομή μάζας και συμμετρικό γεωμετρικό σχήμα, το κέντρο μάζας του βρίσκεται συνήθως στο γεωμετρικό κέντρο.



2. Το κέντρο μάζας σε απλά γεωμετρικά σχήματα (κόκκινες κουκίδες)

Αναρωτηθήκατε ποιες είναι οι διαφορές μεταξύ του κέντρου μάζας και του κέντρου βάρους;

Κέντρο μάζας είναι το σημείο στο οποίο η κατανομή της μάζας είναι ίση προς όλες τις κατευθύνσεις και δεν εξαρτάται από το βαρυτικό πεδίο.

Κέντρο βάρους είναι το σημείο στο οποίο η κατανομή του βάρους είναι ίση προς όλες τις κατευθύνσεις και εξαρτάται από το βαρυτικό πεδίο.

Ωστόσο, το κέντρο βάρους συνήθως βρίσκεται στο ίδιο σημείο με το κέντρο μάζας, όταν έχουμε να κάνουμε με αντικείμενα πάνω ή κοντά στην επιφάνεια της Γης. Είναι το σημείο μέσω του οποίου η δύναμη της βαρύτητας δρα στο αντικείμενο. Επομένως, στα παραδείγματά μας και τα δύο κέντρα θεωρούνται ίσα, καθώς ασχολούμαστε με αντικείμενα στην επιφάνεια της γης.

Γιατί, λοιπόν, να μελετάμε το κέντρο της μάζας;

Φανταστείτε, για παράδειγμα, ότι θέλετε να κατασκευάσετε μια τοξωτή γέφυρα. Πώς θα βεβαιωθείτε ότι είναι ισορροπημένη και σταθερή; Το κέντρο μάζας σας βοηθά να σχεδιάσετε κατασκευές που είναι ασφαλείς και λειτουργικές. Για το λόγο αυτό, οι αρχιτέκτονες και οι πολιτικοί μηχανικοί λαμβάνουν υπόψη το κέντρο μάζας κατά το σχεδιασμό κτηρίων και γεφυρών, για να διασφαλίσουν ότι μπορούν να αντέξουν διάφορα φορτία και περιβαλλοντικές συνθήκες.

3. Γλεφυρα Αβόρανης, Αγρίνιο



Source: <https://www.agrinionews.gr/h-gefyra-tis-avoranis-se-kindyno/>

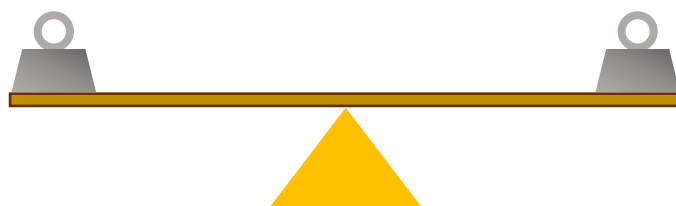
Συνοπτικά, το κέντρο μάζας είναι πολύτιμο, επειδή παρέχει θεμελιώδεις γνώσεις για τη συμπεριφορά των αντικειμένων και των συστημάτων. Είναι μια κρίσιμη έννοια στη φυσική, τη μηχανική και άλλους επιστημονικούς κλάδους, που μάς δίνει τη δυνατότητα να αναλύσουμε και να σχεδιάσουμε ένα ευρύ φάσμα δομών, μηχανών και συστημάτων, με γνώμονα τη σταθερότητα, την ισορροπία και την αποτελεσματικότητα. Οι μηχανικοί χρησιμοποιούν το κέντρο μάζας στη δομική ανάλυση για να αξιολογήσουν τη σταθερότητα και την ακεραιότητα των κτιρίων και των γεφυρών. Είναι ζωτικής σημασίας για τη διασφάλιση της ισορροπίας της δομής και την πρόληψη των καταρρεύσεων.

Βήμα 2: Ασκήσεις στην τάξη

Τραμπάλα

Φανταστείτε ότι βρίσκεστε σε μια παιδική χαρά και βλέπετε μια τραμπάλα. Πώς λειτουργεί; Το κέντρο μάζας μιας τραμπάλας είναι το σημείο περιστροφής της, όπως φαίνεται από το τρίγωνο στην παρακάτω εικόνα. Χωρίς ανθρώπους πάνω της, η τραμπάλα είναι τέλεια ισορροπημένη γύρω από το κέντρο μάζας της.

Και ακόμα κι αν της βάλετε μερικά βάρη και τα κατανείμετε ομοιόμορφα, το κέντρο μάζας θα είναι το ίδιο και η τραμπάλα θα παραμείνει ισορροπημένη.

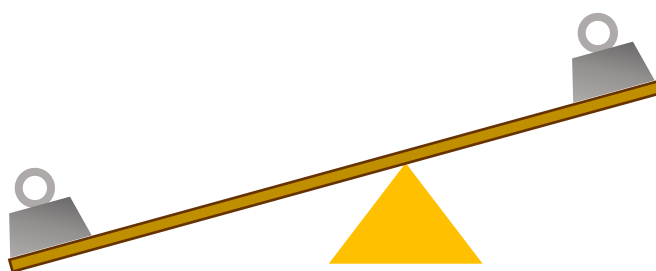


4. Τραμπάλα σε ισορροπία

Προσπαθήστε να φτιάξετε μια απλή τραμπάλα στην τάξη σας με μερικά ξύλινα ραβδιά και ένα μικρό τρίγωνο από σκληρό χαρτί ή κάποιο παιδικό παιχνίδι.

Εάν μετακινήσετε το σημείο περιστροφής, τότε τι συμβαίνει; Η τραμπάλα θα στρίψει προς την κατεύθυνση που υπάρχει η μεγαλύτερη απόσταση από το τρίγωνο. Γιατί; Γιατί πρακτικά αλλάζει το κέντρο μάζας ή κέντρο βάρους, όπως βλέπουμε στο δεύτερο παράδειγμα.

Με απλά λόγια, στην πρώτη τραμπάλα το κέντρο ισορροπίας (ή πιο επιστημονικά το κέντρο της μάζας) βρίσκεται στη μέση, καθώς το αριστερό βάρος*απόσταση ισούται με το δεξί βάρος*απόσταση. Στη δεύτερη περίπτωση το βάρος*απόσταση είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο και το κέντρο ισορροπίας αλλάζει.

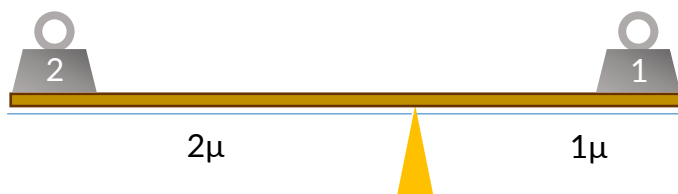


5. Τραμπάλα που γέρνει στην αριστερή της πλευρά

Προσπαθήστε να σκεφτείτε τι θα συμβεί αν βάζετε μεγαλύτερα βάρη. Τι θα γινόταν;

Θα ισορροπήσει;

Ας υποθέσουμε ότι στα ακόλουθα παραδείγματα βάζουμε ένα βάρος 2 κιλών 2 μέτρα μακριά από το σημείο περιστροφής και στη δεξιά πλευρά 1 κιλό 1 μέτρο μακριά από το κέντρο. Θα ισορροπήσει; Ή είναι σωστό το παρακάτω σχήμα;



6. Τραμπάλα με διαφορετικά βάρη και αποστάσεις από το κεντρικό σημείο

Επειδή μας ενδιαφέρει μόνο ο άξονας x θα υπολογίσουμε το κέντρο της μάζας χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο μέρος των εξισώσεων και αναφερόμενοι σε μέτρα και όχι εκατοστά. Παρακαλώ, σημειώστε ότι επειδή το κεντρικό σημείο είναι η κορυφή του τριγώνου, αυτό θεωρείται το σημείο με $x=0$, στον άξονα x . Άρα, το αντικείμενο στα αριστερά απέχει -2μ από αυτό και το αντικείμενο στα δεξιά είναι $+1\mu$. Θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη εξίσωση που δείχνουμε παραπάνω και αφορά τον άξονα x . Πρακτικά, είναι το άθροισμα των γινομένων της μάζας κάθε αντικειμένου επί την απόστασή του από το κεντρικό σημείο. Στη συνέχεια διαιρείται με τη συσσωρευμένη μάζα. Επομένως, η εξίσωση γίνεται:

$$x_m = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2kg * (-2m) + 1kg * 1m}{2kg + 1kg} = \frac{-3}{3} = -1$$

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι το σημείο ισορροπίας είναι 1 μέτρο στα αριστερά του τριγώνου. Άρα το σύστημα δεν ισορροπεί και το παραπάνω σχήμα δεν είναι σωστό.

Κέντρο βάρους (μάζας) και παραδείγματα από την καθημερινή ζωή

Παρακολουθήστε μερικά πολύ ενδιαφέροντα και διασκεδαστικά βίντεο για το πώς χρησιμοποιούνται οι παραπάνω έννοιες σε περιστάσεις από την πραγματικής ζωή. <https://www.youtube.com/watch?v=qRsJXXb9WNE>
<https://www.youtube.com/watch?v=R8wKV0UQtlo>

Βήμα 3: Εργασίες για το σπίτι και ιδέες ανάπτυξης

Υπολογίστε το βάρος των αντικειμένων

Προσπαθήστε να δημιουργήσετε μια μεγαλύτερη τραμπάλα και χρησιμοποιήστε την, για να συνειδητοποιήσετε εάν ένα αντικείμενο είναι βαρύτερο ή ελαφρύτερο από κάποιο άλλο αντικείμενο.

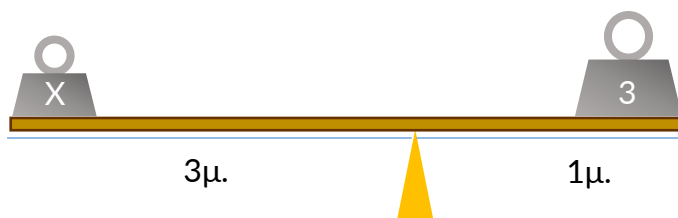
Αν γνωρίζετε το βάρος ενός αντικειμένου (π.χ. ότι αυτό είναι 100 γρ.), μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την τραμπάλα, για να μετρήσετε ακριβώς 100 γρ ζάχαρη;

Αναζητήστε στο διαδίκτυο πληροφορίες σχετικά με το πώς λειτουργούν οι παλαιότερες ζυγαριές.

Βρείτε την ακριβή μάζα ενός αντικειμένου

Βρείτε την ακριβή μάζα ενός αντικειμένου

Στο παρακάτω παράδειγμα (εικόνα 7), ποιο είναι το βάρος του αντικειμένου στα αριστερά; Θεωρήστε ότι το κέντρο μάζας στον άξονα x είναι 0 και ότι το κεντρικό σημείο είναι η κορυφή του τριγώνου.



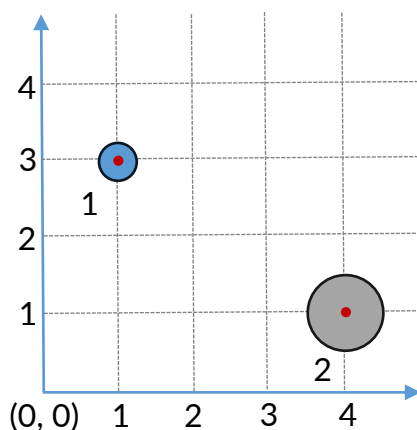
7. Παράδειγμα υπολογισμού βάρους

Υπολογίστε το κέντρο της μάζας σε επιφάνεια (δισδιάστατος χώρος)

Πρώτα, παρακολουθήστε το βίντεο https://www.youtube.com/watch?v=-nIS_mVjn6A

Στη συνέχεια, υπολογίστε το κέντρο της μάζας του σχήματος 9 σε δύο περιπτώσεις:

- α) όσον αφορά το σημείο $(0, 0)$ και
- β) όσον αφορά το σημείο $(2, 2)$



8. Παράδειγμα υπολογισμού του κέντρου μάζας

Πηγές:

Wikipedia contributors. (2023, November 4). Centre of mass. Wikipedia.

https://en.wikipedia.org/wiki/Centre_of_mass

What is Centre of mass? (article) | Khan Academy. (n.d.). Khan Academy.

<https://www.khanacademy.org/science/physics/linear-momentum/Centre-of-mass/a/what-is-Centre-of-mass>

Αυτό το έργο έχει χρηματοδοτηθεί με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Αυτή η δημοσίευση αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του συγγραφέα και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Κωδικός έργου: 1-FR01-KA220-SCH-00027771

Μάθετε περισσότερα για το Visit Math στη διεύθυνση:

<https://visitmath.eu>

Αυτό το έργο αδειοδοτείται με την άδεια Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).

