

Αριθμητικές και γεωμετρικές ακολουθίες

Θέμα	Αριθμητικές ακολουθίες
Μαθησιακοί στόχοι	Εφαρμογή των αριθμητικών ακολουθιών σε πρακτικούς υπολογισμούς
Ηλικιακή ομάδα	14-18 έτη (προσαρμόσιμο σε κάθε χώρα)
Εκτιμώμενη διάρκεια	2 ώρες
Δραστηριότητες	Χρήση αριθμητικών ακολουθιών για υπολογισμούς σε οικονομικά θέματα
Σχετικές επισκέψεις	Βαρσοβία

Προαπαιτούμενες γνώσεις

- Ο μαθητής θα πρέπει να είναι σε θέση:
- να υπολογίσει τον επόμενο όρο μιας αριθμητικής ακολουθίας, με δεδομένο τον πρώτο όρο της καθώς και την κοινή διαφορά (αριθμητικής προόδου)
- να υπολογίσει τον επόμενο όρο μιας γεωμετρικής ακολουθίας, με δεδομένο τον πρώτο της όρο και τον κοινό λόγο (γεωμετρικής προόδου)
- να εφαρμόσει τύπους για το άθροισμα των πρώτων n όρων και για τις δύο ακολουθίες.

Βήμα- βήμα: η ακολουθία στην τάξη

Βήμα 1: Εισαγωγή στο θέμα

Σύντομη παρουσίαση των ιστορικών στοιχείων της συγκεκριμένης ακολουθίας

Ένα ενδιαφέρον γεγονός που σχετίζεται με τις αριθμητικές ακολουθίες προέρχεται από τη ζωή του Καρλ Φρίντριχ Γκάους (1777-1855), Γερμανού επιστήμονα και εφευρέτη. Ο Γκάους επέδειξε εξαιρετικές μαθηματικές ικανότητες από είμαι νεαρή ηλικία. Λέγεται πως, όταν ο ήταν 7 ετών, ο δάσκαλός του ζήτησε από τους μαθητές να υπολογίσουν το άθροισμα των φυσικών αριθμών από το 1 έως το 50 (που σχηματίζουν αριθμητική ακολουθία με τον πρώτο όρο και την κοινή διαφορά να είναι και οι δύο ίσοι με 1). Ο δάσκαλος πιθανότατα είχε την ελπίδα πως αυτή η εργασία θα έπαιρνε πολύ χρόνο στους μαθητές, δίνοντας του τη δυνατότητα να ηρεμήσει και να ξεκουραστεί στην τάξη.

Φανταστείτε την έκπληξή του, όταν ο νεαρός Gauss έδωσε τη σωστή απάντηση σε ελάχιστο χρόνο.

Ίσως ο Γκάους να τα υπολόγισε ως εξής: έγραψε αριθμούς από το 1 έως το 50 σε μια σειρά και ακριβώς από κάτω τους ίδιους αριθμούς με αντίστροφη σειρά. Στη συνέχεια έκανε τα αθροίσματα.

1	+	2	+	3	+	4	+	...	+	49	+	50	
+	50	+	49	+	48	+	47	+	...	+	2	+	1
51	+	51	+	51	+	51	+	...	+	51	+	51	
= 51 * 50													

Με αυτόν τον τρόπο, έλαβε έναν αριθμό διπλάσιο από το ζητούμενο άθροισμα.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 49 + 50 = \frac{51 * 50}{2} = 1275$$

Σύνδεση μεταξύ αυτών των στοιχείων και του μαθηματικού αντικειμένου

Η μέθοδος που χρησιμοποίησε ο Gauss για τον υπολογισμό του αθροίσματος των πρώτων 50 φυσικών αριθμών μπορεί να εφαρμοστεί για να βρεθεί το άθροισμα των πρώτων n όρων οποιασδήποτε αριθμητικής ακολουθίας:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

S_n - το άθροισμα των πρώτων n όρων της ακολουθίας

a_1 - ο πρώτος όρος της ακολουθίας

a_n - ο τελευταίος όρος της ακολουθίας

Στην περίπτωση του υπολογισμού του Gauss, μπορούμε να πούμε ότι ισχύει ο εξής τύπος:

$$a_1 + a_n = 51, \text{ όπου } n=50.$$

Με την ευκαιρία, θυμηθείτε τον τύπο για τον επόμενο όρο μιας αριθμητικής ακολουθίας:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

όπου το r είναι η κοινή διαφορά.

Από την άλλη, μια γεωμετρική ακολουθία, είναι μια αριθμητική ακολουθία με τουλάχιστον τρεις όρους, όπου κάθε όρος που ξεκινά από τον δεύτερο προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τον προηγούμενο όρο με έναν αριθμό που ονομάζεται κοινός λόγος.

Ένα παράδειγμα τέτοιας ακολουθίας είναι:

-1, 2, -4, 8, ... όπου ο πρώτος όρος $a_1 = -1$ και ο κοινός όρος (q) is (-2).

Για να βρούμε τους επόμενους όρους μιας γεωμετρικής ακολουθίας, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Ο τύπος για τον υπολογισμό του αθροίσματος των πρώτων n όρων μιας γεωμετρικής ακολουθίας είναι:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

S_n - άθροισμα των πρώτων n όρων της ακολουθίας

a_1 - ο πρώτος όρος της ακολουθίας

q - η κοινή αναλογία

Βήμα 2: Εργασίες στην τάξη

Ζέσταμα

1. Σε μια αριθμητική αναλογία δίνεται $a_1 = 16$ και $r = -2$. Να υπολογίσετε a_{50} και το άθροισμα των πρώτων πενήντα όρων αυτής της ακολουθίας.

2. Να ελέγξετε αν οι

14,	2,	$\frac{2}{7}$,	$\frac{1}{2}$
-----	----	-----------------	---------------

 αριθμοί: αποτελούν γεωμετρική ακολουθία.

Χαρτζιλίκι

Φανταστείτε έναν απίστευτα πλούσιο συγγενή να σας επισκέπτεται και να σας υπόσχεται να σας δίνει χαρτζιλίκι κάθε μήνα για τα επόμενα δύο χρόνια. Σας δίνονται δύο επιλογές:

Επιλογή 1:

Τον πρώτο μήνα να παίρνετε 100€, και για κάθε μήνα που ακολουθεί να παίρνετε περισσότερα από τον προηγούμενο ποσό ίσο με το 50% του χαρτζιλικιού που πήρατε τον πρώτο μήνα.

Επιλογή 2:

Τον πρώτο μήνα να πάρετε 2€ και κάθε μήνα που ακολουθεί να παίρνετε 50% περισσότερα χρήματα από τον προηγούμενο

Ποια επιλογή θα κάνετε;

Ας υπολογίσουμε πόσο χαρτζιλίκι μπορείτε να παίρνετε κάθε μήνα.

Το K_n υποδηλώνει χαρτζιλίκι (σε €) που ελήφθη κάθε n μήνα. Λοιπόν, η κατάσταση έχει ως εξής:

Επιλογή 1:

$$\begin{aligned} K_1 &= 100 \\ K_2 &= K_1 + 50 = 100 + 50 \\ K_3 &= K_2 + 50 = 100 + 2 * 50 \\ K_4 &= K_3 + 50 = 100 + 3 * 50 \\ &\dots \\ K_n &= K_{n-1} + 50 = 100 + (n - 1) * 50 \end{aligned}$$

Επιλογή 2:

$$\begin{aligned} K_1 &= 2 \\ K_2 &= K_1 * 1,5 = 2 * 1,5 \\ K_3 &= K_2 * 1,5 = 2 * 1,5^2 \\ K_4 &= K_3 * 1,5 = 2 * 1,5^3 \\ &\dots \\ K_n &= K_{n-1} * 1,5 = 2 * 1,5^{n-1} \end{aligned}$$

Οι διαδοχικές πληρωμές στην πρώτη επιλογή σχηματίζουν μία αριθμητική ακολουθία (με τον πρώτο όρο $K_1=100$ και την κοινή διαφορά $r=50$), και η δεύτερη επιλογή – μια γεωμετρική ακολουθία (με τον πρώτο όρο $K_1=2$ και τον κοινό όρο $q=1.5$).

Άσκηση 1

Συμπληρώστε τον πίνακα και θα βρείτε πόσο χαρτζιλίκι θα παίρνετε κάθε μήνα τον πρώτο χρόνο:

Μήνας	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Επιλογή 1	100	150	200	?	?	?	?	?	?	?	?	650
Επιλογή 2	3	4.5	6.75	?	?	?	?	?	?	?	?	173

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει πόσο χαρτζιλίκι θα μπορούσατε να πάρετε τον τελευταίο μήνα του πρώτου και του δεύτερου χρόνου:

	Επιλογή 1:	Επιλογή 2:
K_{12}	$100+11*50=650$	$2*1,5^{11}\approx 173$
K_{24}	$100+23*50=1\,250$	$2*1,5^{23}\approx 22\,445$

Αν κάνετε την επιλογή 1, θα μπορούσατε να πάρετε περισσότερα χρήματα τον τελευταίο μήνα του πρώτου χρόνου συγκριτικά με την επιλογή 2. Ωστόσο, τον τελευταίο μήνα του δεύτερου χρόνου, το ποσό που θα πάρετε, σύμφωνα με την επιλογή 2, είναι σημαντικά υψηλότερο.

Τώρα, να υπολογίσετε το άθροισμα όλων των ποσών και από τις δύο επιλογές. Εδώ μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τους τύπους για το άθροισμα των πρώτων n όρων μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής αναλογίας.

Επιλογή 1:

$$\begin{aligned} S_{24} &= \frac{K_1 + K_{24}}{2} * 24 = \\ &= \frac{100 + 1250}{2} * 24 = \\ &= 22\ 800 \end{aligned}$$

Επιλογή 2 :

$$\begin{aligned} S_{24} &= K_1 * \frac{1 - q^{24}}{1 - q} = \\ &= 2 * \frac{1 - (1,5)^{24}}{1 - 1,5} \approx \\ &\approx 67\ 332 \end{aligned}$$

Η επιλογή 2, αν και στην αρχή φαινόταν λιγότερο ελκυστική, αποδείχθηκε πολύ πιο ωφέλιμη από την επιλογή 1. Ωστόσο, και οι δύο συγκεκριμένες επιλογές μάς υπενθυμίζουν τους δύο πιο συνηθισμένους τρόπους υπολογισμού των τόκων σε διάφορες χρηματοοικονομικές πράξεις.

Ας ρίξουμε μια πιο προσεκτική ματιά στην επιλογή 2.

Με αυτή τη μέθοδο οι τόκοι υπολογίζονται στο κεφάλαιο, αυξημένο με τόκους της προηγούμενης περιόδου. Εάν το αρχικό κεφάλαιο ήταν K_0 και το επιτόκιο είναι $p\%$, τότε μετά από κάθε περίοδο υπολογισμού των τόκων, το κεφάλαιο μαζί με τους τόκους είναι:

Μετά την πρώτη περίοδο:
$$K_1 = K_0 + \frac{p}{100} K_0 = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

Μετά από δύο περιόδους:
$$K_2 = K_1 + \frac{p}{100} K_1 = K_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2$$

Μετά από n περιόδους:
$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

Αυτή η μέθοδος υπολογισμού των τόκων (κέρδους) εφαρμόζεται συνήθως κατά τον υπολογισμό των τόκων στις τραπεζικές καταθέσεις. Όταν η τράπεζα προσθέτει το ποσό των τόκων στο κεφάλαιο (υπόλοιπο λογαριασμού), λέμε ότι οι τόκοι προσαυξάνονται.

Σημείωση: Στις παρακάτω εργασίες, όταν μιλάμε για τόκους τραπεζικών καταθέσεων, δεν λαμβάνουμε υπόψη τον φόρο τόκων (κέρδους), δηλαδή υποθέτουμε ότι το επιτόκιο που παρέχεται είναι καθαρό.

Εργασία 1

Σε λογαριασμό με επιτόκιο 4% ετησίως κατατέθηκαν 10.000 €. Υπολογίστε το υπόλοιπο του λογαριασμού μετά από 5 χρόνια, εάν ο κάτοχος του λογαριασμού δεν κάνει καταθέσεις ή αναλήψεις.

$$K_0 = \text{€ } 10\ 000$$

K_0 - κατατεθέν ποσό

$$p\% = 4\%$$

p - ετήσιο επιτόκιο

$$n = 5$$

n - αριθμός ετών (περίοδος συσσωρευμένου τόκου)

K_5 - υπόλοιπο λογαριασμού μετά από 5 χρόνια

$$K_5 = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^5 = 10\ 000 \left(1 + \frac{4}{100} \right)^5 = ?$$

Συμπληρώστε τους υπολογισμούς. Είναι το κέρδος από αυτήν την κατάθεση υψηλότερο από 2 000 €;

Για καταθέσεις μικρότερες του 1 έτους, η τράπεζα αναπροσαρμόζει τους τόκους μετά από κάθε περίοδο διάρκειας της κατάθεσης. Για παράδειγμα, αν αφήσουμε χρήματα σε 3μηνη κατάθεση για 2 χρόνια, οι τόκοι θα υπολογίζονται κάθε 3 μήνες, σε αυτήν την περίπτωση 8 φορές. Θα πρέπει επίσης να το λάβουμε υπόψη κατά τον προσδιορισμό του επιτοκίου (p). Θα το συζητήσουμε αυτό στην επόμενη εργασία.

Εργασία 2

Καταθέτουμε 30.000€ σε 2/μηνι κατάθεση. Το επιτόκιο για αυτήν την κατάθεση είναι 5% ετησίως. Ποιο θα είναι το υπόλοιπο του λογαριασμού μετά από ενάμιση χρόνο;

$$K_0 = \text{€ } 30\,000$$

$$n = 9$$

(1.5 χρόνος = 18 μήνες, και η κατάθεση είναι 2/μηνι)

$$p\% = \frac{2}{12} * 5\% = \frac{5}{6}\%$$

Υπολογίστε το επιτόκιο για την καταθετική περίοδο.

Να υπολογίσετε σύμφωνα με τον
λογαριασμό μετά από 18 μήνες:

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

τύπο: το υπόλοιπο του

$$K_9 = 30\,000 \left(1 + \frac{5}{6 * 100} \right)^9 = ?$$

Βήμα 3: Εργασίες για το σπίτι και ιδέες ανάπτυξης

Ο Karol, ο οποίος είναι 25 ετών, σκοπεύει να καταθέτει 100 ευρώ σε ένα ταμείο συνταξιοδότησης στην αρχή κάθε μήνα. Το επιτόκιο του αμοιβαίου κεφαλαίου είναι 6% ετησίως και οι τόκοι προσαυξάνονται μηνιαίως. Τι κεφάλαιο θα συγκεντρώσει ο Karol όταν φτάσει τα 65 του χρόνια;

Υλικά μέσα που χρειάζονται για τον υπολογισμό

Αριθμομηχανή

Αυτό το έργο έχει χρηματοδοτηθεί με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Αυτή η δημοσίευση αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του συγγραφέα και η

Αυτό το έργο έχει χρηματοδοτηθεί με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Αυτή η δημοσίευση αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του συγγραφέα και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Κωδικός έργου: 1-FR01-KA220-SCH-00027771

Μάθετε περισσότερα για το Visit Math στη διεύθυνση:

<https://visitmath.eu>

Αυτό το έργο αδειοδοτείται με την άδεια Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).

