

Wektory

Temat	Wektory
Cele kształcenia	Uczeń zna charakterystykę wektora i sposób jego działania. Uczeń wie, jak używać wektorów i wykonywać obliczenia.
Grupa wiekowa	12-16 lat (do zaadoptowania w każdym kraju)
Przewidywany czas	45 minut
Zadania	Praktyczne zastosowanie wektorów
Powiązane wycieczki	Toulouse.

Uczeń powinien znać:

Definicję wektora

Operacje na wektorach

Współrzędne kartezjańskie

Krok po kroku: kolejność działań w klasie

Wprowadzenie do tematu

Krótką prezentacją spuścizny historycznej

W matematyce wektor jest obiektem matematycznym używanym do reprezentowania wielkości, która ma wielkość (lub rozmiar) i kierunek. Wektory są powszechnie używane do opisywania wielkości fizycznych, takich jak prędkość, siła, przemieszczenie, pole elektryczne itp. Są one niezbędne w wielu gałęziach matematyki i fizyki.



Pochodzenie wektorów :

Koncepcja wektora jest owocem długiej historii, która rozpoczęła się ponad dwa tysiące lat temu. Dwie koncepcje, początkowo odrębne, leżą u podstaw jego formalizacji. Jedną z nich była geometria, zajmująca się długościami, kątami oraz pomiarami powierzchni i objętości. Druga to algebra, która zajmuje się liczbami, dodawaniem i mnożeniem oraz, bardziej ogólnie, zbiorami z działaniami.



Dofinansowane przez
Unię Europejską

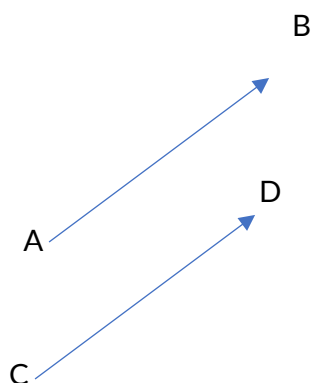
Krok 2: Czynności w klasie

W klasie uczniowie mogą wykonywać szeroki zakres zadań związanych z wektorami matematycznymi. Zadania te mają na celu rozwijanie zrozumienia podstawowych pojęć, umiejętności rozwiązywania problemów i stosowania wektorów w rzeczywistych sytuacjach. Oto kilka przykładów zadań odpowiednich dla tej grupy wiekowej:

1. Wprowadzenie do wektorów :

- Rozumienie pojęcia wektora jako wielkości o długości i kierunku.
- Przedstawianie wektorów na płaszczyźnie za pomocą strzałek lub współrzędnych kartezjańskich.

Koncepcja wektora :



$\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ mają tę samą wielkość (lub rozmiar) i ten sam kierunek.

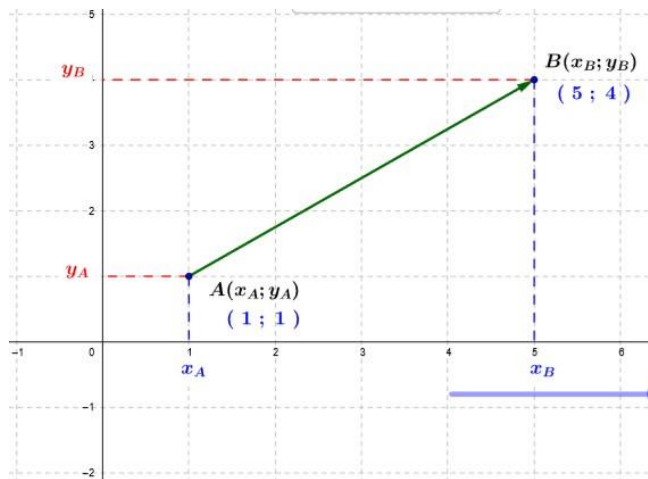
Wektor może być nazwany pojedynczą literą.

Przyjmujemy $\vec{u}$ jako wektor i zapisujemy:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Uwaga: Wektor zerowy jest dość nietypowy. W przeciwieństwie do innych wektorów, nie ma on ani kierunku, ani sensu! Jest jednak często używany w obliczeniach.

Współrzędne kartezjańskie:



Aby obliczyć współrzędne wektora AB, zastosujemy następujący wzór:

$$\overrightarrow{AB} = (x = x_B - x_A; y = y_B - y_A)$$

W tym przykładzie :

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 1; 4 - 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4; 3)$$

Współrzędne te nazywane są składowymi wektora, gdzie **x** jest jako odcięta, a **y** jako wartość rzędnej. Zapisujemy: $\overrightarrow{AB} = (x, y)$

2. Działania :

Uczniowie mogą nauczyć się dodawać wektory graficznie i analitycznie.

Można wykorzystać przykłady wizualne i zadania praktyczne. Uczniowie mogą rysować wektory na papierze i używać linijki do trójkątów lub równoległoboków do dodawania wektorów.

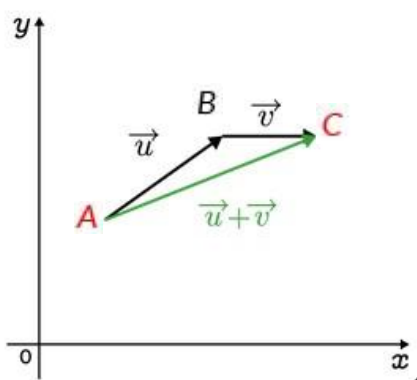
Dodawanie wektorów

- Metoda graficzna :

Suma wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest określona przez następujący wektor wypadkowy $\vec{u} + \vec{v}$.

Metoda trójkąta na płaszczyźnie kartezjańskiej daje wektor wynikowy poprzez utworzenie trójkąta, który jest sumą 2 wektorów.

- Przykład :



Ogólnie rzecz biorąc, dodawanie dwóch wektorów jest definiowane przy użyciu reguły Chaslesa:

Dla wszystkich punktów A, B i C na płaszczyźnie: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Aby zastosować regułę Chaslesa, koniec pierwszego wektora musi pokrywać się z początkiem drugiego. Aby dodać dwa wektory, które nie są w tej konfiguracji, "przenosimy jeden z wektorów za drugi".

- Metoda algebraiczna:

Wektory można dodawać metodą algebraiczną, sumując składowe dwóch wektorów.

Jeśli masz 2 wektory $\vec{A} = (A_1, A_2)$ i $\vec{B} = (B_1, B_2)$ po dodaniu $\vec{A} + \vec{B}$ daje nowy wektor $\vec{C} = (C_1, C_2)$ gdzie każdy składnik jest uzyskiwany przez dodanie odpowiadającego mu składnika $\vec{B}$ i odpowiadający mu składnik $\vec{A}$.

Matematycznie, można to wyrazić w następujący sposób:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_1 + B_1, A_2 + B_2) = (C_1, C_2)$$

Oto konkretny przykład:

$$\text{Jeśli } \vec{A} = (3; 2) \text{ i } \vec{B} = (4; 1) \text{ to } \vec{A} + \vec{B} = (3 + 4; 2 + 1)$$

$$\vec{C} = (7; 3)$$

$$\text{Również gdy } \vec{B} + \vec{B} = (4+4; 1+1) = (8; 2) \text{ to } 2\vec{B} = (2 B_1; 2 B_2)$$

Odejmowanie wektorów

- Metoda algebraiczna :

Wektory mogą być również odejmowane składnik po składniku. Jeśli masz 2 wektory

$\vec{A} = (A_1, A_2)$ i $\vec{B} = (B_1, B_2)$ wtedy, odejmując $\vec{A} - \vec{B}$ daje nowy wektor $\vec{D} = (D_1, D_2)$ gdzie każdy składnik jest uzyskiwany przez odjęcie odpowiadającego mu składnika $\vec{B}$ od odpowiadającego mu składnika $\vec{A}$.

Matematycznie, można to wyrazić w następujący sposób:

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = (A_1 - B_1, A_2 - B_2) = (D_1, D_2)$$

Oto konkretny przykład:

$$\text{Przyjmując, że } \vec{A} = (3, 1) \text{ i } \vec{B} = (1, 2)$$

Różnica $\vec{A} - \vec{B}$ wynosić zatem będzie :

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = (3-1, 1-2) = (2, -1)$$

$$\text{więc, } \vec{D} = (2, -1)$$

3. Iloczyn wektora i liczby rzeczywistej:

Iloczyn wektora i liczby rzeczywistej jest podstawową operacją w algebrze liniowej i umożliwia zmianę intensywności lub kierunku wektora. Działanie to jest często nazywane "mnożeniem skalarnym", ponieważ polega na mnożeniu wektora przez skalar (liczbę rzeczywistą).

Niech $\vec{V}$ będzie wektorem a c liczbą rzeczywistą. Iloczyn wektora $\vec{V}$ przez liczbę rzeczywistą c daje nowy wektor oznaczony $c \cdot \vec{V}$ lub $c\vec{V}$.

Każda składowa wektora wynikowego jest uzyskiwana przez pomnożenie odpowiedniej składowej oryginalnego wektora przez skalar c .

Matematycznie, jeśli $\vec{V} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ jest wektorem, to iloczyn $c \cdot \vec{V}$ jest dany przez:

$$c \cdot \vec{V} = (c \cdot V_1, c \cdot V_2, \dots, c \cdot V_n)$$

NB: Wektor może istnieć zarówno w 3 wymiarach, jak i w n wymiarach!

Oznacza to, że każdy składnik wektora $\vec{V}$ oznacza to, że każdy składnik wektora c , tworząc nowy wektor, którego składowe są c razy większe niż składowe oryginalnego wektora.

Oto konkretny przykład:

Niech $\vec{A} = (2, -1)$ i $c = 3$. wynik $c \cdot \vec{A}$ wyniósłby wtedy:

$$3 \cdot \vec{A} = (3 \times 2, 3 \times (-1)) = (6, -3)$$

Wektor będący wynikiem iloczynu ma tę samą wielkość (lub rozmiar) i ten sam kierunek, ale jest 3 razy silniejszy.

$$\text{Ale jeśli: } -3 \cdot \vec{A} = ((-3) \times 2, (-3) \times (-1)) = (-6, +3)$$

Zatem, mnożenie przez ujemną liczbę rzeczywistą zmieniło kierunek wektora.



VISIT MATH



Dofinansowane przez
Unię Europejską

4. Problemy i projekty:

Zaproponuj ćwiczenia i projekty, które pozwolą uczniom zastosować koncepcje wektorów w rzeczywistych sytuacjach, takich jak rzucanie pociskami, symulowanie trajektorii itp.

Ćwiczenia te pomogą uczniom rozwinąć umiejętności rozwiązywania problemów, wzmocnić ich zrozumienie matematyki i zobaczyć praktyczne zastosowanie wektorów w różnych dziedzinach nauki i inżynierii.

Łącząc teorię z ćwiczeniami praktycznymi i przykładami z życia wziętymi, które pokazują, w jaki sposób wektory są wykorzystywane w życiu codziennym oraz w różnych dziedzinach matematyki i nauk ścisłych, koncepcja ta może stać się bardziej przystępna i interesująca dla uczniów.

Krok 3: Praca domowa i pomysły na udoskonalenie

Oto kilka przykładów zadań domowych i kreatywnych ćwiczeń do nauki o wektorach, które mogą pomóc w lepszym zrozumieniu wektorów w matematyce:

Praca domowa:

- 1. Problemy związane z przemieszczeniem:** Rozdaj uczniom serię zadań dotyczących przemieszczania się z wykorzystaniem wektorów do obliczania odległości, prędkości i kierunków. Na przykład, poproś ich, aby obliczyli, ile czasu zajmie przelot z jednego miasta do drugiego, biorąc pod uwagę prędkość i kierunek wiatru.

Możliwe instrukcje ogólne:

- 2. Pozycja początkowa:** Podaj początkową pozycję punktu lub obiektu, często reprezentowaną przez wektor początkowy $\vec{A}$ lub współrzędne punktu A.

- **Przesunięcie:** Wyraż przesunięcie jako wektor. Może to być podane wprost (na przykład, $\vec{D} = (3, -2)$ dla przesunięcia o 3 jednostki w prawo i 2 jednostki w dół) lub domyślnie (na przykład "przesuń o 4 jednostki na północ").
 - **Działania z użyciem wektorów:** Użyj działania na wektorach, aby obliczyć pozycję końcową. Nowa pozycja $\vec{B}$ można znaleźć, dodając wektor przesunięcia $\vec{D}$ do położenia początkowego $\vec{A}$.
 - **Współrzędne końcowe:** Podaj ostateczne współrzędne punktu lub obiektu po jego przeniesieniu.
 - **Pytania dodatkowe:** Ask additional questions depending on the context of the problem. This could include questions about the total distance traveled, final direction, or other concepts related to travel.
3. **Równoważenie sił:** Przedstaw uczniom sytuacje związane z siłami działającymi na obiekt i poproś ich o znalezienie wypadkowej. Mogą również wyjaśnić, czy obiekt znajduje się w równowadze.
4. **Współrzędne i przesunięcia:** Poproś uczniów o rozwiązanie problemów związanych z przesunięciami przy użyciu współrzędnych kartezjańskich. Na przykład, poproś ich, aby opisali, w jaki sposób figura geometryczna porusza się pod wpływem wektorów przesunięć.
5. **Modelowanie projektów:** Poproś uczniów o stworzenie modelu rzeczywistej sytuacji z wykorzystaniem wektorów. Mogą na przykład modelować ruch rzuconego przedmiotu, zamach, a nawet trajektorię piłki golfowej.

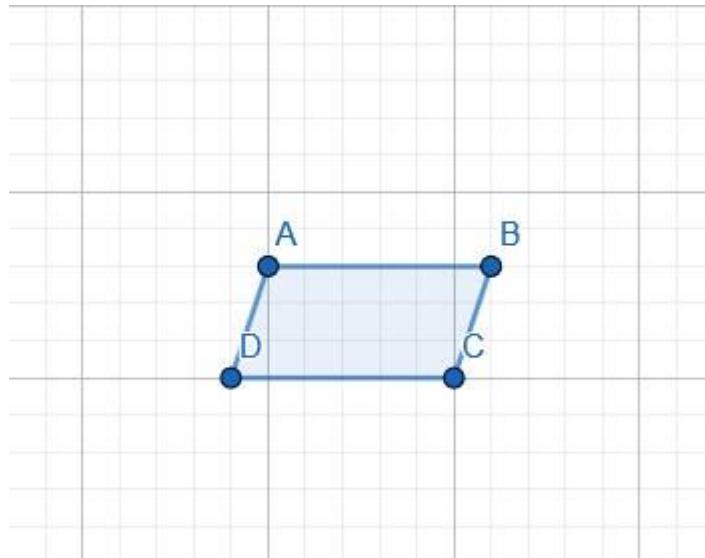
Dla równoległoboku ABCD, utwórz punkty E, F, G i H takie, że:

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$$

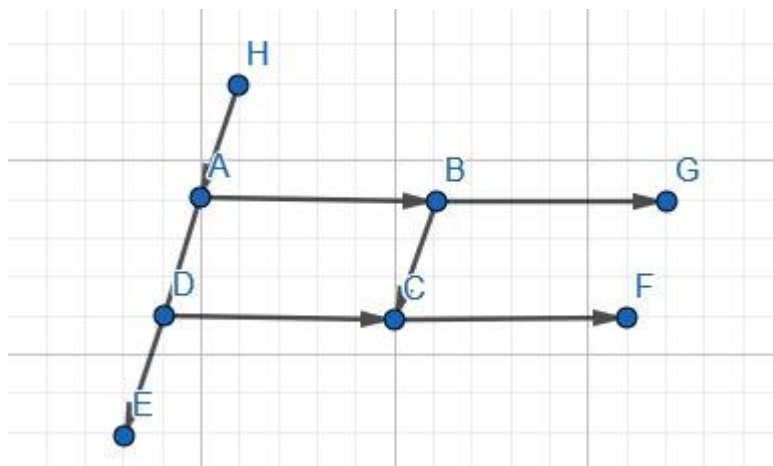
$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$$



Solution:



Sfinansowane ze środków UE. Wyrażone poglądy i opinie są
jedynie opiniami autora lub autorów i niekoniecznie
odzwierciedlają poglądy i opinie Unii Europejskiej lub Europejskiej
Agencji Wykonawczej ds. Edukacji i Kultury (EACEA). Unia
Europejska ani EACEA nie ponoszą za nie odpowiedzialności.

Kod projektu: 1-FR01-KA220-SCH-00027771

Aby dowiedzieć się więcej o projekcie VisitMath, odwiedź:

<https://visitmath.eu>

Ta praca jest dostępna na licencji Creative Commons Attribution-
NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License
(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).

