

Algebra

Tytuł	Równania z dwiema niewiadomymi
Cele kształcenia	Umiejętność interpretowania punktów w kartezjańskim układzie współrzędnych, rozwiązywanie równań z dwiema zmiennymi. Wyznaczanie maksimum/minimum za pomocą funkcji kwadratowych. Rozwiązywanie równań stożków z danych i odwrotnie.
Grupa wiekowa	14-18 lat (do dostosowania w każdym kraju)
Czas trwania	2 h
Zadania	Poszukiwanie szczególnych punktów elips i paraboli w praktyce.
Powiązane wycieczki	Piza, Lukka

Uczeń powinien:

znać płaszczyznę kartezjańską jako układ odniesienia za pomocą współrzędnych;
wiedzieć, jak rozpoznać rodzaj stożka po nadaniu mu normalnego kształtu.

Krok po kroku:

Krok 1: Wstęp

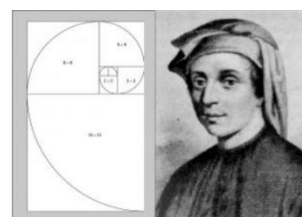
Równania z dwiema niewiadomymi to temat rozciągający się od analizy po geometrię i algebrę. Są to równania w x i y , a rozwiązaniami są wszystkie i tylko uporządkowane pary $(x;y)$, które sprawiają, że równość jest prawdziwa. Zbiór tych rozwiązań odpowiada miejscu geometrycznemu na płaszczyźnie kartezjańskiej. W szczególności zajmujemy się parabolą i elipsą.

Kilka krótkich informacji historycznych.

Równania zostały wprowadzone po raz pierwszy w IX wieku naszej ery przez perskiego matematyka, astronoma Al-Khwarizmi, w celu rozwiązywania problemów kupieckich lub podziału spadku.

Jednak algebra klasyczna narodziła się i rozwinęła w świecie arabskim; we Włoszech musieliśmy poczekać do XI w., kiedy to powstały szkoły, w rozwój których znaczący wkład wniósł Leonardo Pisano, znany jako Fibonacci.

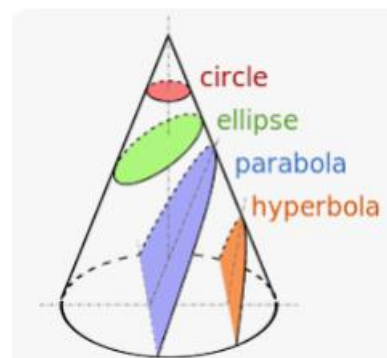
Później, w okresie renesansu, istnieli wielcy algebraiści, tacy jak Pacioli, Cardano i Bombelli.



Leonardo Pisano-La tecnica della scuola

Dopiero później, w XVII wieku, symbolikę, którą znamy i używamy do dziś, wprowadził Kartezjusz. To właśnie odtąd, dzięki niemu i Fermatowi, algebra połączyła się z geometrią. W 1637 roku Kartezjusz wprowadził geometrię analityczną i stwierdził, że równania drugiego stopnia są związane z krzywymi stożkowymi badanymi przez Apoloniusza (262-190 p.n.e.). Wraz z wprowadzeniem nowych metod algebraicznych związanych z płaszczyzną kartezjańską Kartezjusz i Fermat zdołali rozwiązać stojące przed nimi problemy w prostszy sposób i zweryfikować właściwości stożków. W rzeczywistości te ostatnie odkrył już wcześniej Menaechmus (380-320 p.n.e.), próbując rozwiązać problem powielenia sześcienu.

Menaechmus jako pierwszy wykazał, że krzywe stożkowe można uzyskać przez przecięcie stożka z płaszczyzną (stąd nazwa stożków). Później Apoloniusz wykazał, że można je otrzymać również z podwójnego stożka, przecinając go płaszczyzną o zmiennym nachyleniu. Zawdzięczamy mu także nazwy paraboli, elipsy i hiperboli. Po Apoloniuszu porzucono badania nad stożkami.





Pojawiły się one ponownie w okresie renesansu, w sztuce z perspektywą, a następnie w baroku, gdzie zakrzywione linie (elipsy) zajmowały uprzywilejowane miejsce.

Powiązania między tymi elementami a tematami matematycznymi

Krzywe stożkowe są czterech typów: parabola, eliptyczna, hiperbola i parabola. Dwa ważne zastosowania w rzeczywistych sytuacjach, w celu znalezienia maksimum i minimum lub problemów akustycznych, dotyczą w szczególności paraboli i elips, na których się skupimy.

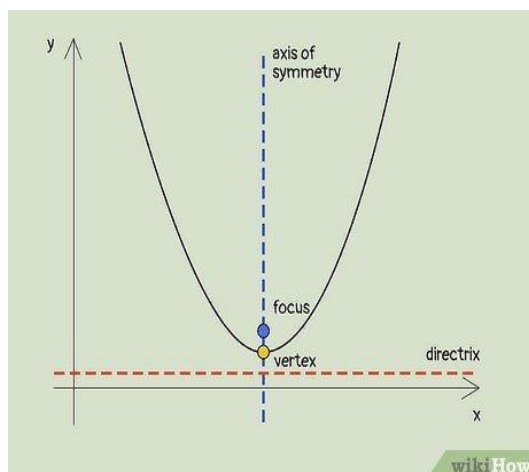
Parabola to zbiór punktów na płaszczyźnie P , równoodległych od danego punktu, zwanego ogniskiem F , i od danej linii prostej r , zwanej kierownicą.



Z tej definicji, po kilku przekształceniach algebraicznych możemy otrzymać, równanie paraboli:

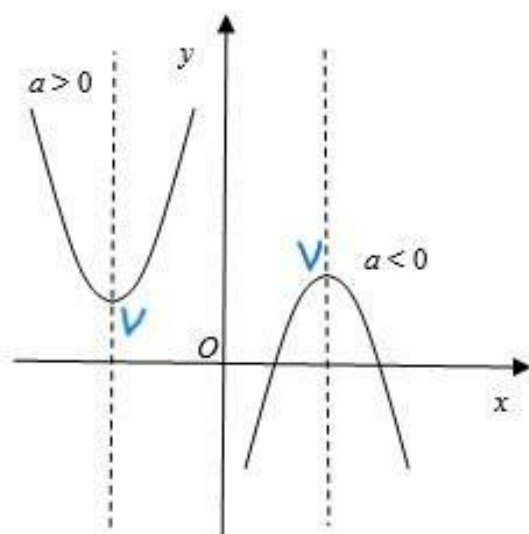
$$y = ax^2 + bx + c$$

Parabole z tym równaniem mają oś symetrii równoległą do osi y :



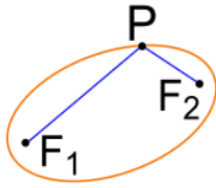
Jeśli $a > 0$, ramiona paraboli są skierowane do góry, a wierzchołek V jest najniższym punktem.

Jeśli $a < 0$, ramiona są skierowane w dół, a wierzchołek V jest najwyższym punktem.



$$V = \left(\frac{-b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$$

Elipsa to zbiór punktów P na płaszczyźnie takich, że suma odległości tych punktów od dwóch stałych punktów, zwanych ogniskami F1 i F2, jest stała.



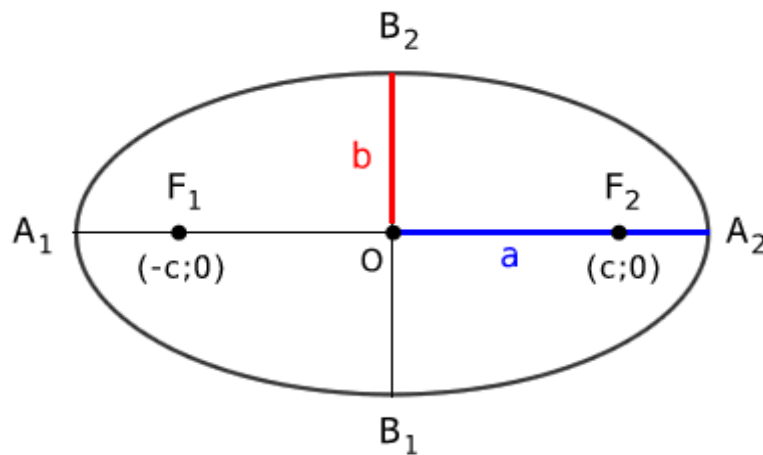
$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{constant}$$

Z definicji, po kilku przekształceniach, dochodzimy do równania elipsy w postaci ogólnej:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a i b to długości półosi

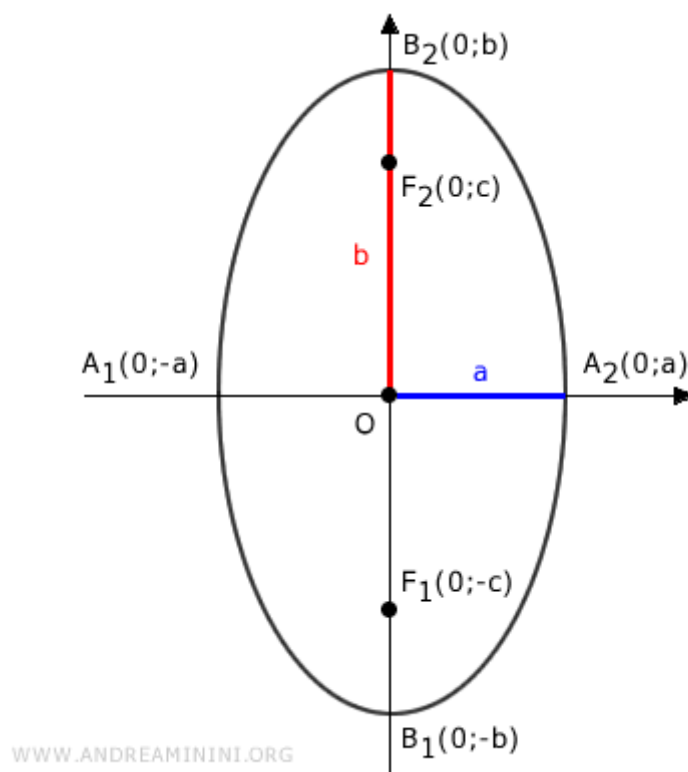
Jeśli $a > b$, ogniska znajdują się na osi x:



WWW.ANDREAMININI.ORG

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Jeśli $a < b$, ogniska znajdują się na osi y:



$$c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

Krok 2: Ćwiczenia

Ćwiczenie 1

Wyzwanie: Masz tylko 320 m płotu i chcesz ogrodzić jak najwięcej terenu.

Ogrodzenie musi mieć kształt prostokąta. Jak długie powinny być boki tego prostokąta?

Jeśli weźmiemy $L_1=10\text{m}$ i $L_2=150\text{m}$, prostokąt będzie miał pole...

Jeśli weźmiemy $L_1=20\text{m}$ i $L_2=140\text{m}$, prostokąt będzie miał pole...

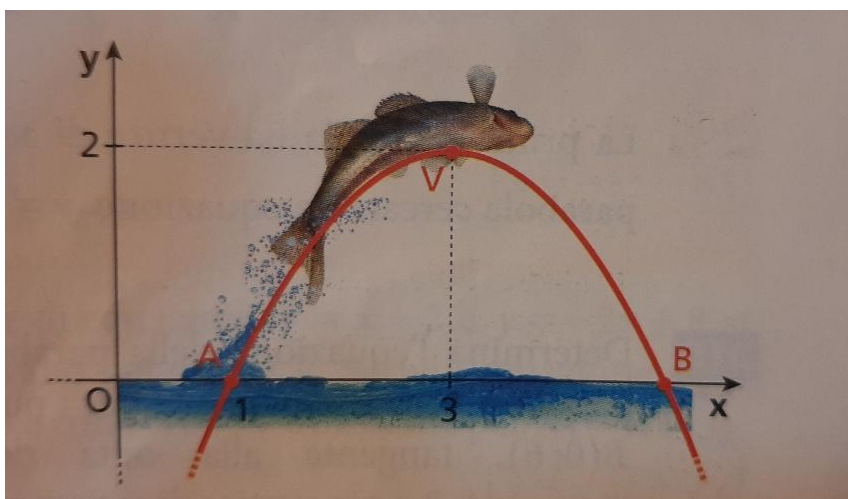
Uwaga, pamiętajcie, że obwód musi wynosić 320m: $2L_1+2L_2=320\text{m}$, zatem

$L_1+L_2=160\text{m}$.

Metodą prób i błędów spróbuj rozwiązać ten sam problem, używając x jako niewiadomej dla jednej strony (a co za tym idzie, druga będzie wynosić $160-x$) i uzyskując parabolę związaną ze wzorem na pole: $y=x(160-x)$. Jaki szczególny punkt tej paraboli wskazuje na rozwiązanie problemu?

Ćwiczenie 2

Obserwuj trajektorię lotu ryby. Czy rozpoznasz jakąś szczególną krzywiznę? Co reprezentuje najwyższy punkt tej krzywej? Wyznacz współrzędne tego punktu. Następnie znajdź odcietą punktu B, w którym ryba ponownie wchodzi do wody.
*Wyzwanie: spróbuj wyznaczyć równanie krzywej opisującej trajektorię ryby.

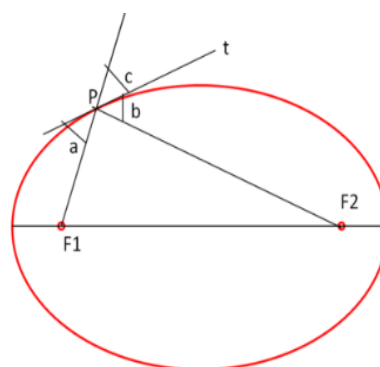


Ćwiczenie 3

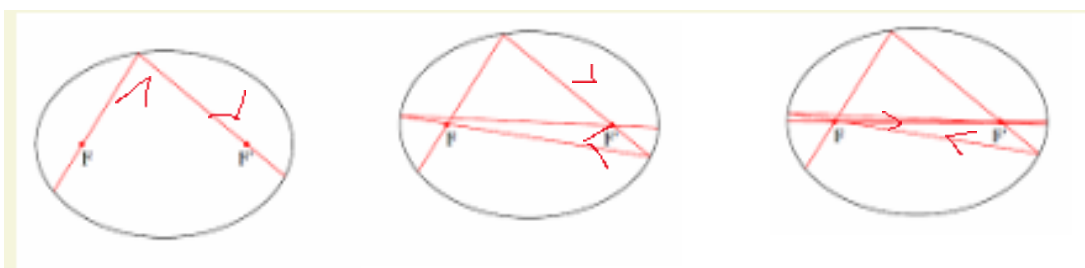
Spróbuj skonstruować elipsę w oparciu o charakterystyczne punkty. Weź kartkę papieru, przebij ją w dwóch miejscach - które będą odpowiadać dwóm ogniskom - i odetnij kawałek sznurka o żądanej długości. Przymocuj nić w dwóch punktach, zabezpieczając ją z tyłu taśmą klejącą, a następnie ołówkiem, ciągnąc sznurek do momentu, aż będzie napięty, narysuj elipsę na kartce. Pod poniższym linkiem można obejrzeć film, który to pokazuje:

<https://www.youtube.com/shorts/nKqfHrYFne8>

Prześledź trajektorię kuli bilardowej po narysowanej elipsie i oblicz trajektorię odbicia od elipsy, wiedząc, że odbicie ma ten sam kąt w stosunku do prostopadłej trajektorii dotarcia.



Gdzie na pewno trafiają piłki, które wystartowały z ogniska, po pierwszym odbiciu?
Aby dokładnie obliczyć kąt, użyj kątomierza.



Ćwiczenie 4

Na tym zdjęciu Koloseum widać konstrukcję w kształcie elipsy. Maksymalna długość (oś główna) amfiteatru wynosi około 188 m, natomiast maksymalna szerokość (oś mała) wynosi około 156 m. Uzyskaj równanie elipsy reprezentującej zewnętrzny obrys budynku, wybierając środek elipsy jako początek układu odniesienia i linię prostą zawierającą oś główną jako oś x. Gdzie znajdują się ogniska w tym punkcie odniesienia?



Bergamini-Barozzi-Trifone-Lineamenti di matematica.azzurro-vol.3

Krok 3: Praca domowa i wskazówki do dalszej pracy

Zadanie 1

Nić o długości 20 cm przecięto na dwie części. Z uzyskanych dwóch kawałków powstają dwa kwadraty. W którym miejscu przeciąć nitkę, aby suma kwadratów była najmniejsza?

Zadanie 2

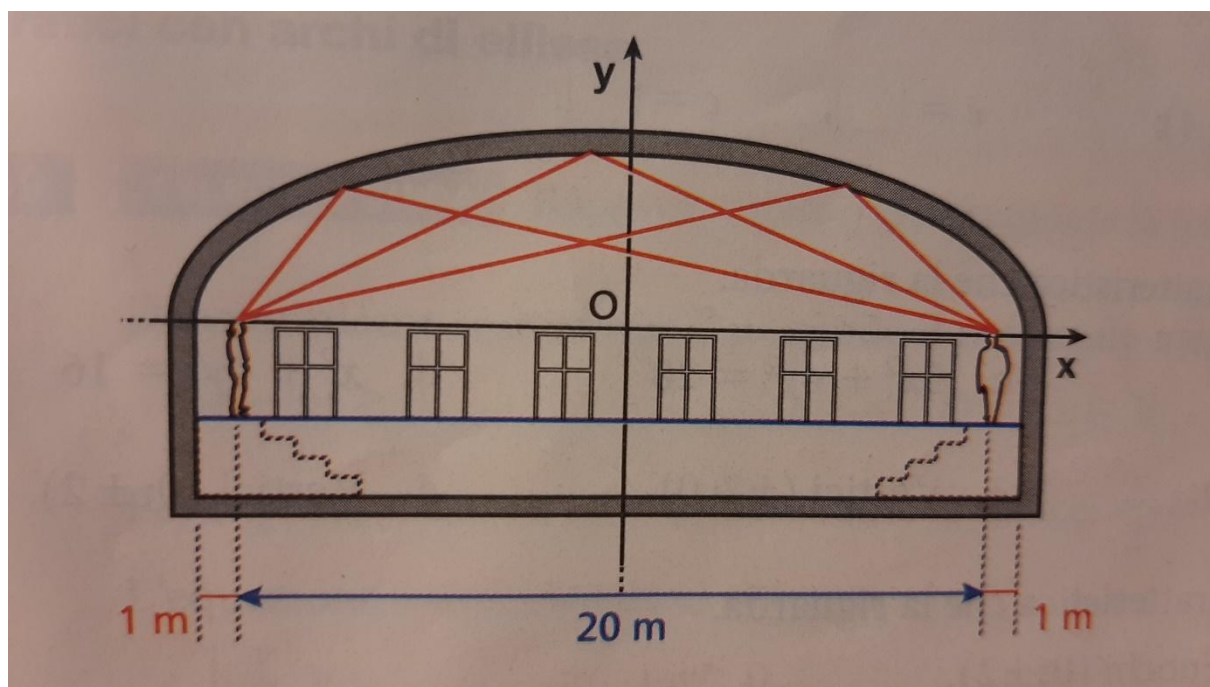
Okno ma kształt prostokąta zwieńczonego półkolem, którego średnica pokrywa się z jednym bokiem prostokąta. Obwód okna wynosi 24m. Wyznacz promień półkola tak, aby przez to okno wpadało najwięcej światła.

Zadanie 3

Komora ze sklepieniem elipsoidalnym ma tę właściwość akustyczną, że jeśli dwie osoby ustawią się w ogniskach elipsy i będą mówić cicho, odwróceniem plecami, słyszą się bardzo dobrze, jakby byli blisko. Dzieje się tak na skutek odbicia fal akustycznych

od ścian sklepienia. Na poniższym rysunku widzimy dwie osoby z głowami w ogniskach elipsy. Znajdź równanie elipsy.

(Z rysunku można obliczyć długość głównej osi $2a$ i odległość ogniskową $2c$. Jak obliczyć b ?)



Bergamini-Barozzi-Trifone-Lineamenti di matematica.azzurro-vol.3

Materiały potrzebne do zajęć

Sznurek, prześcieradła, nożyczki, taśma, kątomierz, ołówek.

Sfinansowane ze środków UE. Wyrażone poglądy i opinie są jedynie opiniami autora lub autorów i niekoniecznie odzwierciedlają poglądy i opinie Unii Europejskiej lub Europejskiej Agencji Wykonawczej ds. Edukacji i Kultury (EACEA). Unia Europejska ani EACEA nie ponoszą za nie odpowiedzialności.

Kod projektu: 1-FR01-KA220-SCH-00027771

Aby dowiedzieć się więcej o projekcie VisitMath, odwiedź:

<https://visitmath.eu>

Ta praca jest dostępna na licencji Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).

