

Geometria

Temat	Środek masy
Cele kształcenia	Zrozumienie pojęcia środka masy
Grupa wiekowa	13-18 lat (do dostosowania w każdym kraju)
Przewidywany czas	2 h
Zadania	Umiejętność obliczania środka masy za pomocą wzorów
Powiązane wycieczki	Agrinio

Wymagana wcześniejsza znajomość

Rozumienie płaszczyzn w geometrii i punktów (krytycznych)

Krok po kroku: sekwencja w klasie

Krok 1: Przedstawienie tematu

Czy znasz grę z ptakiem, w której celem jest balansowanie nim za pomocą dzioba na opuszkę palca? Dlaczego podczas jazdy samochodem ciało kierowcy gwałtownie się obraca, gdy ten zbliża się do zakrętu?

Odpowiedź to "**Środek masy**".

Środek masy to położenie określone względem obiektu lub układu obiektów. Jest to średnia pozycja wszystkich części systemu, ważona zgodnie z ich masami.

Spójrzmy w przeszłość. Środek masy ma naprawdę długą i bogatą historię w fizyce i matematyce. Archimedes, starożytny grecki matematyk, jest często uznawany za twórcę koncepcji środka masy. Sformułował on zasadę dźwigni, stwierdzając, że "równe ciężary w równych odległościach są w równowadze". Zasada ta ma fundamentalne znaczenie dla zrozumienia, w jaki sposób obiekty równoważą się wokół środka masy. Ponadto wielu wybitnych matematyków i

naukowców po nich wniosło wkład w badania w tej dziedzinie.



1. Ptak balansujący dziobem na opuszku palca

Źródło: https://en.wikipedia.org/wiki/Centre_of_mass#/media/File:Bird_toy_showing_Centre_of_gravity.jp

g

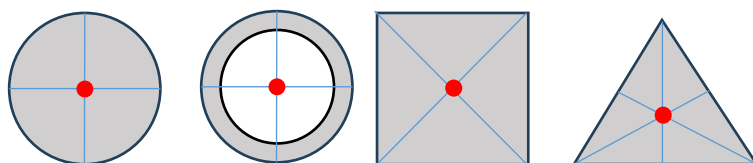
Powiązania między tymi elementami a tematami matematycznymi

Matematycznie można to opisać jako średnią ważoną pozycji wszystkich

jednostek:

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M} \quad y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{M} \quad z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{M}$$

Geometria obiektu, wraz z rozkładem masy w jego wnętrzu, określa położenie jego środka masy. Jeśli obiekt ma równomierny rozkład masy i symetryczny kształt geometryczny, jego środek masy znajduje się zazwyczaj w środku geometrycznym.



2. Środek masy dla niektórych prostych kształtów geometrycznych (czerwone kropki)

Czy zadajesz sobie pytanie, jakie są różnice między środkiem ciężkości a środkiem masy?

Środek masy to punkt, w którym rozkład masy jest równy dla wszystkich kierunków i nie zależy od pola grawitacyjnego. Środek ciężkości to punkt, w którym rozkład masy jest równy dla wszystkich kierunków i zależy od pola grawitacyjnego.

Jednak środek ciężkości jest zwykle zlokalizowany w tym samym punkcie, co środek masy, gdy mamy do czynienia z obiektami na powierzchni Ziemi lub w jej pobliżu. Jest to punkt, przez który siła grawitacji działa na obiekt. Dlatego w naszych przykładach oba centra uważa się za równe, ponieważ mamy do czynienia z obiektami na powierzchni Ziemi.

Dlaczego więc należy uczyć się o środku masy?

Wyobraź sobie na przykład, że chcesz zbudować most łukowy. Jak upewnić się, że jest on wyważony i stabilny? Środek masy pomaga projektować konstrukcje, które są bezpieczne i funkcjonalne. Z tego powodu architekci i inżynierowie budownictwa biorą pod uwagę środek masy podczas projektowania budynków i mostów, aby zapewnić, że wytrzymają one różne obciążenia i warunki środowiskowe.



3. Most Avorani, Agrinio, Grecja

 Źródło: <https://www.agrinionews.gr/h-gefyra-tis-avoranis-se-kindyno/>

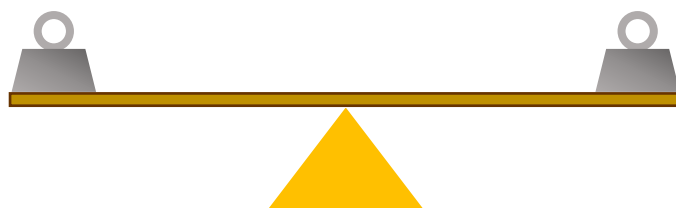
Podsumowując, środek masy jest ważny, ponieważ zapewnia fundamentalny wgląd w zachowanie obiektów i systemów. Jest to kluczowa koncepcja w fizyce, inżynierii i innych dyscyplinach naukowych, umożliwiającą nam analizowanie i projektowanie szerokiej gamy struktur, maszyn i systemów z myślą o stabilności, równowadze i wydajności. Inżynierowie wykorzystują środek masy w analizie dynamicznej do oceny stabilności i integralności budynków i mostów. Ma to kluczowe znaczenie dla zapewnienia równowagi konstrukcji i zapobiegania zawaleniom.

Krok 2: Ćwiczenia do wykonania na lekcji

Huśtawka równoważna

Wyobraź sobie, że jesteś na placu zabaw i widzisz huśtawkę równoważną. Jak ona działa? Środek masy huśtawki jest jej punktem obrotu, co ilustruje trójkąt na poniższym obrazku. Gdy nie ma na niej ludzi, huśtawka jest idealnie wyważona wokół środka masy.

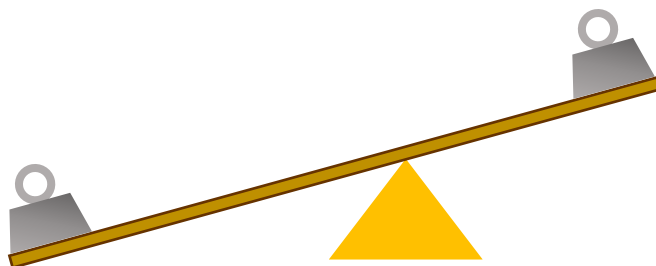
Nawet jeśli umieścisz na niej ciężarki i rozłożysz je równomiernie, środek masy będzie taki sam, a huśtawka pozostanie zrównoważona.



4. Zrównoważona huśtawka

Spróbuj zbudować w klasie prostą huśtawkę z drewnianych patyczków i małego trójkąta wykonanego z twardego papieru lub jakiejś zabawki dla dzieci. Co się stanie, jeśli przesuniesz punkt obrotu? Huśtawka obróci się w kierunku, w którym odległość od trójkąta jest największa. Dlaczego? Ponieważ praktycznie zmienia to środek masy lub środek ciężkości, jak widzimy w drugim przykładzie.

Mówiąc prościej, w pierwszej huśtawce środek równowagi (lub bardziej naukowo środek masy) znajduje się pośrodku, ponieważ lewy ciężar $\cdot$ odległość jest równy prawemu ciężarowi $\cdot$ odległość. W drugim stanie huśtawki odległość waga $\cdot$ ciężar jest większa niż jej odpowiednik, a środek równowagi zmienia się. Spróbuj zbudować prostą huśtawkę w swojej klasie z drewnianych patyków i małego trójkąta wykonanego z twardego papieru lub jakiejś zabawki dla dzieci.

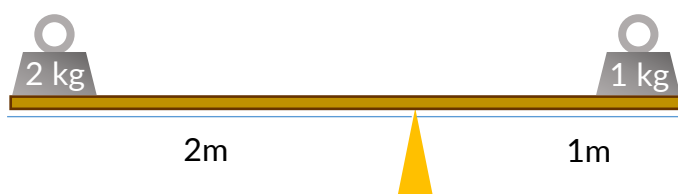


5. Huśtawka równoważna przechylona na lewą stronę

Spróbuj zastanowić się, co się stanie, jeśli umieścisz cięższe ciężary po jednej stronie. Co się wydarzy?

Czy to się równoważy?

Założmy, że w poniższych przykładach umieścimy odważnik o masie 2 kg w odległości 2 metrów od punktu obrotu, a po prawej stronie odważnik o masie 1 kg w odległości 1 metra od środka. Czy taki układ zachowa równowagę? A może poniższy rysunek jest poprawny?



6. Huśtawka z różnymi ciężarami i odległościami od punktu centralnego

Ponieważ zależy nam tylko na osi x , obliczymy środek masy, używając odpowiedniej części równań i używając metrów, a nie centymetrów. Należy pamiętać, że ponieważ punkt centralny jest wierzchołkiem trójkąta, jest on uważany za punkt $x=0$ na osi x . Zatem obiekt po lewej stronie znajduje się -2 m od niego, a obiekt po prawej stronie $+1$ m. Użyjemy pierwszego równania, które pokazaliśmy powyżej, które dotyczy osi x . W praktyce jest to suma iloczynów masy każdego obiektu i jego odległości od punktu centralnego. Następnie jest ona dzielona przez skumulowaną masę.

Dlatego równanie ma postać:

$$x_m = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \text{ kg} \cdot (-2 \text{ m}) + 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m}}{2 \text{ kg} + 1 \text{ kg}} = \frac{-3}{3} = -1$$

Wynik ten pokazuje, że punkt równowagi znajduje się 1 metr na lewo od trójkąta. Zatem układ nie jest zrównoważony, a powyższy rysunek nie jest poprawny.

Środek ciężkości (masy) oraz przykłady z życia codziennego

Obejrzyj kilka bardzo interesujących i zabawnych filmów pokazujących, jak powyższe pojęcia są wykorzystywane w praktyce.

<https://www.youtube.com/watch?v=qRsJXXb9WNE>

<https://www.youtube.com/watch?v=R8wKV0UQtlo>

Krok 3: Praca domowa i wskazówki do dalszej pracy

Oszacuj wagę obiektów

Spróbuj zbudować większą huśtawkę i użyj jej, aby sprawdzić, czy obiekt jest cięższy lub lżejszy od innego obiektu.

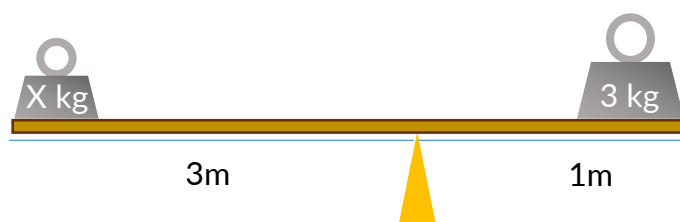
A jeśli znasz wagę obiektu (np. 100 g), czy możesz użyć huśtawki, aby zmierzyć dokładnie 100 g cukru?

Poszukaj w Internecie informacji na temat działania dawnych wag.

Znajdź dokładną masę obiektu

Jaka jest masa obiektu po lewej stronie w poniższym przykładzie (rysunek 8)?

Przyjmij, że środek masy na osi x wynosi 0, a punkt centralny jest wierzchołkiem trójkąta.



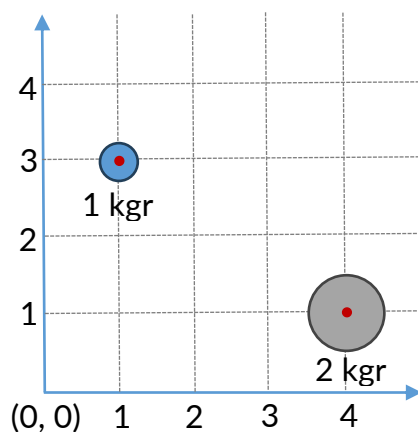
7. Przykład obliczania masy

Oblicz środek masy na płaszczyźnie (przestrzeń dwuwymiarowa)

Na początku obejrzyj filmik https://www.youtube.com/watch?v=-nIS_mVjn6A

Następnie oblicz środek masy figury 9 w dwóch przypadkach:

- a) względem punktu $(0, 0)$, oraz
- b) względem punktu $(2, 2)$



9. Przykład obliczania środka masy

Materiały źródłowe:

Wikipedia contributors. (2023, November 4). Centre of mass. Wikipedia.

https://en.wikipedia.org/wiki/Centre_of_mass

What is Centre of mass? (article) | Khan Academy. (n.d.). Khan Academy.

<https://www.khanacademy.org/science/physics/linear-momentum/Centre-of-mass/a/what-is-Centre-of-mass>

Sfinansowane ze środków UE. Wyrażone poglądy i opinie są jedynie opiniami autora lub autorów i niekoniecznie odzwierciedlają poglądy i opinie Unii Europejskiej lub Europejskiej Agencji Wykonawczej ds. Edukacji i Kultury (EACEA). Unia Europejska ani EACEA nie ponoszą za nie odpowiedzialności.

Kod projektu: 1-FR01-KA220-SCH-00027771

Aby dowiedzieć się więcej o projekcie VisitMath, odwiedź:

<https://visitmath.eu>

Ta praca jest dostępna na licencji Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).

