

Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny

Temat	Ciągi liczbowe
Cele kształcenia	Zastosowanie ciągów liczbowych do praktycznych obliczeń
Grupa wiekowa	14-18 lat (do dostosowania w każdym kraju)
Przewidywany czas	2 godziny
Zadania	Użycie ciągów liczbowych do obliczeń finansowych
Powiązane wycieczki	Warszawa, Lille, Amiens, Lukka, Agen

Wymagana wcześniejsza wiedza

Uczeń potrafi:

- obliczyć kolejny wyraz ciągu arytmetycznego mając jego pierwszy wyraz i różnicę ciągu;
- obliczyć kolejny wyraz ciągu geometrycznego mając jego pierwszy wyraz i iloraz ciągu.
- zastosować wzory na sumę n -początkowych wyrazów dla obu ciągów.

Krok po kroku: kolejność w klasie

Krok 1: Wprowadzenie do tematu

Krótką prezentacją elementów dziedzictwa w tej kolejności

Z ciągiem arytmetycznym związana jest ciekawostka z życia Carla Friedricha Gaussa (1777 - 1855) niemieckiego naukowca i wynalazcy. Gauss już od najmłodszych lat wykazywał niezwykle zdolności matematyczne.

Podobno gdy Gauss miał 7 lat, nauczyciel w jego klasie kazał uczniom obliczyć sumę liczb naturalnych od 1 do 50 (które przecież stanowią ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie i różnicy równym 1). Zapewne miał nadzieję, że zajmie to uczniom dużo czasu i dzięki temu będzie miał spokój do końca lekcji. Można sobie wyobrazić jego zaskoczenie, gdy mody Gauss podał poprawną odpowiedź już po chwili.

Być może Gauss liczył w następujący sposób. Zapisał on liczby od 1 do 50, a pod spodem te same liczby w odwrotnej kolejności i wykonał dodawanie:

$$\begin{array}{r}
 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 49 + 50 \\
 + 50 + 49 + 48 + 47 + \dots + 2 + 1 \\
 \hline
 51 + 51 + 51 + 51 + \dots + 51 + 51 = 51 * 50
 \end{array}$$

W ten sposób otrzymał liczbę dwa razy większą niż szukana suma. Wobec tego:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 49 + 50 = \frac{51 * 50}{2} = 1275$$

Powiązania między tymi elementami a tematami matematycznymi

Opisany w tej ciekawostce sposób obliczania sumy 50 początkowych liczb naturalnych można wykorzystać do znalezienia sumy początkowych wyrazów dowolnego ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

S_n - suma n -początkowych wyrazów ciągu

a_1 - pierwszy wyraz ciągu

a_n - ostatni wyraz ciągu

W odniesieniu do tego, co liczył Gauss można powiedzieć, że licznik w tym wzorze, czyli: $a_1 + a_n = 51$, natomiast $n = 50$.

Przy okazji przypomnijmy wzór na kolejny wyraz ciągu arytmetycznego: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ gdzie r to różnica ciągu.

Ciągiem geometrycznym nazywamy natomiast ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez liczbę, zwaną ilorazem ciągu.

Przykładem takiego ciągu jest: $-1, 2, -4, 8, \dots$ gdzie pierwszy wyraz, czyli $a_1 = -1$ a iloraz ciągu (q) jest równy -2 .

Aby otrzymać kolejne wyrazy ciągu geometrycznego musimy zastosować wzór:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Wzór na sumę n -kolejnych wyrazów ciągu to:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

S_n - suma n -początkowych wyrazów ciągu

a_1 - pierwszy wyraz ciągu

a_n - ostatni wyraz ciągu

Krok 2: Zajęcia klasowe

Rozgrzewka

1. W ciągu arytmetycznym dane są; $a_1 = 16$ i $r = -2$. Oblicz a_{50} oraz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu.

2. Sprawdź, czy liczby:

$$14, 2, \frac{2}{7}, \frac{1}{2}$$

tworzą ciąg geometryczny.

Kieszonkowe

Wyobraź sobie, że odwiedza cię niesamowicie bogaty krewny i obiecuje, że przez najbliższe dwa lata będzie ci co miesiąc wypłacał kieszonkowe. Przedstawił ci dwie propozycje do wyboru:

Propozycja nr 1:

W pierwszym miesiącu otrzymujesz kwotę **100 €**, a w każdym następnym miesiącu będziesz otrzymywał więcej niż w poprzednim o kwotę równą 50% kieszonkowego w pierwszym miesiącu.

Propozycja nr 2:

W pierwszym miesiącu otrzymasz **2 €**, a w każdym następnym miesiącu będziesz otrzymywał o 50 % więcej niż w poprzednim miesiącu.

Którą propozycję wybrać?

Obliczmy, jak wysokie kieszonkowe otrzymałbyś w kolejnych miesiącach. K_n oznacza kieszonkowe (w €) otrzymane w n -tym miesiącu. Zatem sytuacja wygląda tak:

Propozycja nr 1:

$$\begin{aligned} K_1 &= 100 \\ K_2 &= K_1 + 50 = 100 + 50 \\ K_3 &= K_2 + 50 = 100 + 2 * 50 \\ K_4 &= K_3 + 50 = 100 + 3 * 50 \\ &\dots \\ K_n &= K_{n-1} + 50 = 100 + (n - 1) * 50 \end{aligned}$$

Propozycja nr 2:

$$\begin{aligned} K_1 &= 2 \\ K_2 &= K_1 * 1,5 = 2 * 1,5 \\ K_3 &= K_2 * 1,5 = 2 * 1,5^2 \\ K_4 &= K_3 * 1,5 = 2 * 1,5^3 \\ &\dots \\ K_n &= K_{n-1} * 1,5 = 2 * 1,5^{n-1} \end{aligned}$$

Kolejne wypłaty w 1 propozycji tworzą ciąg arytmetyczny (o pierwszym wyrazie $K_1=100$ i różnicy $r=50$), a w drugiej - ciąg geometryczny (o pierwszym wyrazie $K_1=2$ i ilorazie $q=1,5$).

Ćwiczenie 1

Uzupełnij tabelę a dowiesz się ile kieszonkowego otrzymałbyś w każdym miesiącu pierwszego roku:

miesiąc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Propozycja nr 1	100	150	200	?	?	?	?	?	?	?	?	650
Propozycja nr 2	3	4,5	6,75	?	?	?	?	?	?	?	?	173

W tej tabeli przedstawiono, ile otrzymasz kieszonkowego w ostatnim miesiącu po pierwszym i drugim roku:

	Propozycja nr 1:	Propozycja nr 2:
K_{12}	$100 + 11 \cdot 50 = 650$	$2 \cdot 1,5^{11} \approx 173$
K_{24}	$100 + 23 \cdot 50 = 1\,250$	$2 \cdot 1,5^{23} \approx 22\,445$

Jeśli wybierzemy propozycję nr 1, to w ostatnim miesiącu pierwszego roku otrzymamy więcej niż propozycji nr 2. Jednak w ostatnim miesiącu drugiego roku zdecydowanie wyższa jest wypłata według propozycji nr 2.

Policzmy teraz sumę wszystkich wypłat z obu propozycji. Skorzystamy tutaj ze wzorów na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.

Propozycja nr 1:

$$\begin{aligned}
 S_{24} &= \frac{K_1 + K_{24}}{2} \cdot 24 = \\
 &= \frac{100 + 1250}{2} \cdot 24 = \\
 &= 22\,800
 \end{aligned}$$

Propozycja nr 2:

$$\begin{aligned}
 S_{24} &= K_1 \cdot \frac{1 - q^{24}}{1 - q} = \\
 &= 2 \cdot \frac{1 - (1,5)^{24}}{1 - 1,5} \approx \\
 &\approx 67\,332
 \end{aligned}$$

Propozycja nr 2, chociaż wydawała się na początku mało atrakcyjna, okazała się o wiele korzystniejsza niż propozycja nr 1.

Obie te propozycje przypominają nam dwa najczęściej spotykane sposoby naliczania odsetek przy różnych operacjach finansowych. Przyjrzyjmy się dokładniej propozycji nr 2.

W tej metodzie odsetki obliczane są od kapitału powiększonego o odsetki za wcześniejszy okres. Jeśli kapitał początkowy wynosił K_0 , a oprocentowanie jest równe $p\%$, to po kolejnych okresach naliczania odsetek kapitał wraz z odsetkami wynosi:

po pierwszym okresie:
$$K_1 = K_0 + \frac{p}{100} K_0 = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

po dwóch okresach:
$$K_2 = K_1 + \frac{p}{100} K_1 = K_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2$$

po n okresach:
$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

Ten sposób obliczania odsetek (zysku) stosowany jest zwykle przy naliczaniu odsetek od lokat bankowych. Gdy bank dolicza kwotę odsetek do kapitału (stanu konta), to mówimy, że odsetki są kapitalizowane.

Uwaga: W poniższych zadaniach, gdy mówimy o oprocentowaniu lokat bankowych, nie uwzględniamy podatku od odsetek (zysku), czyli przyjmujemy, że podano oprocentowanie netto.

Zadanie 1

Na konto, którego oprocentowanie wynosi 4% w skali roku, wpłacono 10 000 €.

Oblicz, jaki będzie stan konta po upływie 5 lat, jeśli właściciel konta nie będzie dokonywał żadnych wpłat ani wypłat.

$$K_0 = 10\ 000\ \text{€}$$

K_0 - wpłacona kwota

$$p\% = 4\%$$

p - oprocentowanie w skali roku

$$n = 5$$

n - liczba lat (okresów naliczania odsetek)

K_5 - kwota na koncie po 5 latach

$$K_5 = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^5 = 10\ 000 \left(1 + \frac{4}{100} \right)^5 = ?$$

Dokończ obliczenia. Czy zysk z tej lokaty będzie wyższy niż 2 000 € ?

Przy lokatach krótszych niż 1 rok bank kapitalizuje odsetki po każdym okresie trwania lokaty. Jeśli na przykład pozostawimy pieniądze na lokacie 3-miesięcznej na 2 lata, to odsetki będą naliczane co 3 miesiące, czyli w tym przypadku 8 razy. Powinniśmy to też uwzględnić w ustalaniu oprocentowania (p). Omówimy to w kolejnym zadaniu.

Zadanie 2

Na lokatę 2-miesięczną wpłacamy 30 000 €. Oprocentowanie tej lokaty wynosi 5% w skali roku. Jaki będzie stan konta po upływie półtora roku?

$$K_0 = 30\ 000\ \text{€}$$

$$n = 9$$

1.5 roku = 18 miesięcy, a lokata jest 2-miesięczna,
mamy więc $n = 9$ okresów naliczania odsetek

$$p\% = \frac{2}{12} * 5\% = \frac{5}{6}\%$$

obliczamy oprocentowanie za okres lokaty

Obliczamy według wzoru: $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$ stan konta po 18 miesiącach:

Krok 3: Praca domowa i pomysły na rozwój

Karol, który ma 25 lat, zamierza wpłacać 100 € na fundusz emerytalny na początku każdego miesiąca. Oprocentowanie funduszu wynosi 6% w skali roku, a kapitalizacja odsetek jest miesięczna. Jaki kapitał zostanie zgromadzony przez Karola, gdy będzie on w wieku 65 lat?

Materiały potrzebne do wycieczki

Kalkulator

Sfinansowane ze środków UE. Wyrażone poglądy i opinie są
jedynie opiniami autora lub autorów i niekoniecznie
odzwierciedlają poglądy i opinie Unii Europejskiej lub Europejskiej
Agencji Wykonawczej ds. Edukacji i Kultury (EACEA). Unia
Europejska ani EACEA nie ponoszą za nie odpowiedzialności.

Kod projektu: 1-FR01-KA220-SCH-00027771

Aby dowiedzieć się więcej o projekcie VisitMath, odwiedź:

<https://visitmath.eu>

Ta praca jest dostępna na licencji Creative Commons Attribution-
NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License
(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).

