VISIT MATH

Cofinancé par l'Union européenne

Les vecteurs

Sujet	Vecteurs.
Objectifs d'apprentissage	Connaître les caractéristiques d'un vecteur et son fonctionnement. Savoir utiliser les vecteurs et faire des calculs.
Tranche d'âge	12 à 16 ans (à adapter selon le pays).
Durée estimée	45 min.
Activités	Utilisation concrète des vecteurs.
Visites associées	Toulouse, Beaumont-de-Lomagne.

Connaissances préalables requises

Définition d'un vecteur.

Opération sur les vecteurs.

Coordonnées cartésiennes.

Étape par étape : la séquence en classe

Étape 1 : Introduire le sujet

Brève présentation des éléments contextuels de cette séquence

En mathématiques, un vecteur est un objet mathématique utilisé pour représenter une quantité qui a à la fois une longueur, une direction et un sens. Les vecteurs sont couramment utilisés pour décrire des grandeurs physiques telles que la vitesse, la force, le déplacement, le champ électrique, etc. Ils sont essentiels dans de nombreuses branches des mathématiques et de la physique.

Cofinancé par l'Union européenne

L'origine des vecteurs :

La notion de vecteur est le fruit d'une longue histoire, commencée voici plus de deux mille ans. Deux familles d'idées, d'abord distinctes, sont à l'origine de la formalisation. L'une d'elle est la géométrie, traitant de longueurs, d'angles et de mesures de surfaces et de volumes. L'autre correspond à l'algèbre, qui traite des nombres, de l'addition ou la multiplication et plus généralement d'ensembles munis d'opérations.

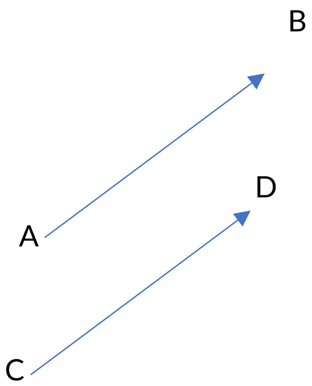
Étape 2 : Activités à faire en classe

En classe, les élèves peuvent aborder un large éventail d'activités en lien avec les vecteurs mathématiques. Ces activités visent à développer leur compréhension des concepts de base, leur capacité à résoudre des problèmes et à appliquer les vecteurs à des situations du monde réel. Voici quelques exemples d'activités adaptées à cette tranche d'âge :

1. Introduction aux vecteurs :

- Comprendre la notion de vecteur en tant que quantité avec une longueur et une direction.
- Représenter des vecteurs dans un plan en utilisant des flèches ou des coordonnées cartésiennes.

Notion de vecteur :



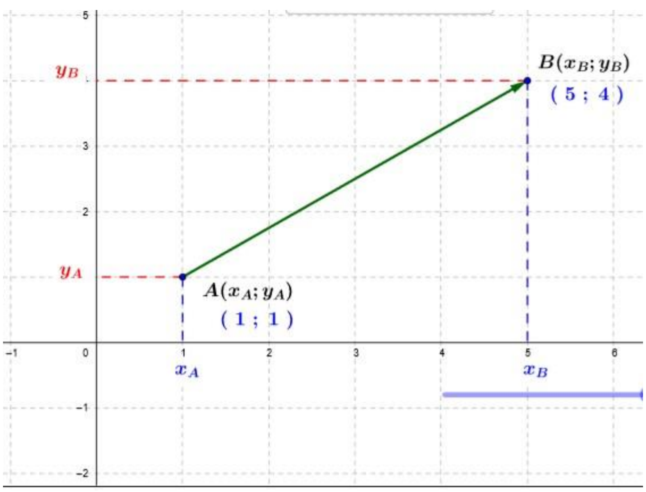
Ci-contre, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, le même sens et la même longueur.

On peut nommer un vecteur avec une seule lettre.

On note $\vec{u}$ ce vecteur et on écrit : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Remarque : Le vecteur nul est assez particulier. En effet, contrairement aux autres vecteurs, il n'a ni direction, ni sen s! Mais il intervient souvent dans les calculs.

Coordonnées cartésiennes :



Pour calculer les coordonnées du vecteur AB, on utilise la formule suivante :

$\overrightarrow{AB}$ = $(x = x_B - x_A ; y = y_B - y_A)$

Dans cet exemple cela donne :

$\overrightarrow{AB}$ = (5 – 1 ; 4 – 1)

$\overrightarrow{AB}$= (4 ; 3)

On nomme ces coordonnées **les composantes du vecteur notées $\boldsymbol{x}$** en abscisses et $\boldsymbol{y}$ en ordonnées. On écrit ainsi : $\overrightarrow{AB}$ = (x, y)

2. Opérations :

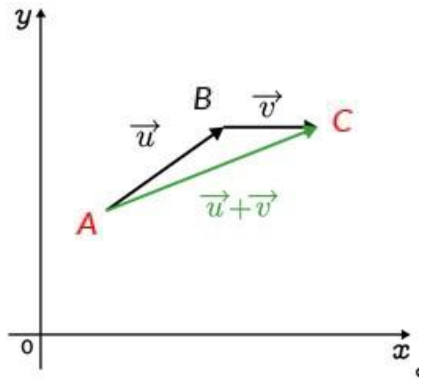
Les élèves peuvent apprendre à additionner des vecteurs graphiquement et analytiquement.
Des exemples visuels et des problèmes pratiques peuvent être utiliser. Les élèves peuvent dessiner des vecteurs sur du papier et utiliser la règle du triangle ou du parallélogramme pour ajouter les vecteurs.

- ### Addition de vecteurs

Méthode graphique :

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est définie par le vecteur résultant suivant $\vec{u}$ + $\vec{v}$.
La méthode du triangle dans un plan cartésien permet d'obtenir un vecteur résultant en formant un triangle, qui sera la somme de 2 vecteurs.

Exemple :



Généralement, on définit l'addition de deux vecteurs à l'aide de la ***relation de Chasles***:

Pour tous points A, B et C du plan : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Pour appliquer la relation de Chasles, il faut que l'extrémité du premier vecteur coïncide avec l'origine du second. Pour additionner deux vecteurs qui ne sont pas dans cette configuration, on "reporte l'un des vecteurs à la suite de l'autre".

Méthode algébrique:

Il est possible d'additionner les vecteurs avec la méthode algébrique, en additionnant entre elles les composantes des deux vecteurs.

Si vous avez deux vecteurs $\vec{A} = (A_1, A_2)$ et $\vec{B} = (B_1, B_2)$ alors l'addition $\vec{A}+\vec{B}$ donne un nouveau vecteur $\vec{C} = (C_1, C_2)$ où chaque composante est obtenue en additionnant la composante correspondante de $\vec{B}$ et la composante correspondante de $\vec{A}$.

Mathématiquement, cela peut être exprimé comme suit :

$\vec{C} = \vec{A}+\vec{B} = (A_1+ B_1, A_2+ B_2) = (C_1, C_2)$

Voici un exemple concret :

Si $\vec{A} = (3 ; 2)$ et $\vec{B} = (4 ; 1)$ alors, $\vec{A} + \vec{B} = (3 + 4 ; 2 + 1)$

$\vec{C} = (7 ; 3)$

De même, $\vec{B} + \vec{B} = (4+4 ; 1+1) = (8 ; 2)$ donc $2\vec{B} = (2 B_1 ; 2 B_2)$

- ### Soustraction de vecteurs

Méthode algébrique :

La soustraction de vecteurs se fait aussi composante par composante.

Si vous avez deux vecteurs $\vec{A}$ = (A_1, A_2) et $\vec{B}$ = (B_1, B_2) alors la soustraction $\vec{A}-\vec{B}$ donne un nouveau vecteur $\vec{D}$ = (D_1, D_2) où chaque composante est obtenue en soustrayant la composante correspondante de $\vec{B}$ de la composante correspondante de $\vec{A}$.

Mathématiquement, cela peut être exprimé comme suit :

$\vec{D} = \vec{A}-\vec{B}$ = ($A_1 - B_1$, $A_2 - B_2$) = (D_1, D_2)

Voici un exemple concret :

Supposons que $\vec{A}$ = (3,1) et $\vec{B}$ = (1,2)

La soustraction $\vec{A}-\vec{B}$ serait donc :

$\vec{D} = \vec{A}-\vec{B}$ = (3−1,1−2) = (2,−1)

Donc, $\vec{D}$ =(2,−1)

3. Produit d'un vecteur par un nombre réel

Le produit d'un vecteur par un nombre réel est une opération fondamentale en algèbre linéaire, et elle permet de modifier **l'intensité** ou **le sens** d'un vecteur. Cette opération est souvent appelée "*multiplication scalaire*" car elle implique la multiplication d'un vecteur par un scalaire (un nombre réel).

Soit $\vec{V}$ un vecteur et c un nombre réel. Le produit du vecteur $\vec{V}$ par le nombre réel c donne un nouveau vecteur noté $c{\cdot}\vec{V}$ ou $c\vec{V}$.

Chaque composante du vecteur résultant est obtenue en multipliant la composante correspondante du vecteur original par le scalaire c.

Mathématiquement, si $\vec{V}$ =(V_1, V_2,..., V_n) est un vecteur, alors le produit $c{\cdot}\vec{V}$ est donné par :

$c{\cdot}\vec{V}$ =($c{\cdot}V_1$, $c{\cdot}V_2$,..., $c{\cdot}V_n$)

NB : un vecteur peut exister en 3 dimensions comme en n dimensions !

Cela signifie que chaque composante du vecteur $\vec{V}$ est multipliée par le scalaire c, produisant un nouveau vecteur dont les composantes sont **c** fois plus grandes que celles du vecteur original.

Voici un exemple concret :

Soit $\vec{A}$ = (2,−1) et c = 3. Le produit $c{\cdot}\vec{A}$ serait donc :

$3{\cdot}\vec{A}$ = (3x2,3x(−1)) = (6,−3)

Le vecteur résultant du produit a la même directeur, le même sens mais une intensité 3 fois plus importante.

Par contre : $-3{\cdot}\vec{A}$ = ((-3)x2,(-3)x(-1)) = (-6,+3)

Ici la multiplication par un nombre réel négatif a changé le sens du vecteur.

4. Problèmes et projets :

Proposer des exercices et des projets qui permettent aux élèves d'appliquer les concepts des vecteurs à des situations réelles, telles que le lancer de projectiles, la simulation de trajectoires, etc.

Ces activités aident les élèves à développer des compétences en résolution de problèmes, à renforcer leur compréhension des mathématiques, et à voir l'application pratique des vecteurs dans divers domaines de la science et de l'ingénierie.

En associant à la théorie des activités pratiques et des exemples concrets qui montrent comment les vecteurs sont utilisés dans la vie quotidienne et dans divers domaines des mathématiques et de la science, on peut rendre le concept plus accessible et intéressant pour les élèves.

Étape 3 : Pour aller plus loin et idées d'activités à la maison

Voici quelques exemples de devoirs et d'activités créatives pour l'apprentissage des vecteurs qui peuvent aider à renforcer la compréhension des vecteurs en mathématiques :

Devoirs à la maison :

- **Problèmes de déplacement :**

Donnez aux élèves une série de problèmes de déplacement nécessitant l'utilisation de vecteurs pour calculer des distances, des vitesses et des directions. Par exemple, demandez-leur de calculer le temps nécessaire pour un voyage en avion d'une ville à une autre, compte tenu de la vitesse et de la direction du vent.

Consigne générale possible :

- **Position initiale** : Donnez la position initiale du point ou de l'objet, souvent représentée par un vecteur initial $\vec{A}$ ou les coordonnées du point A.
- **Déplacement** : Exprimez le déplacement comme un vecteur. Cela peut être donné explicitement (par exemple, $\vec{D}$ = (3,−2) pour un déplacement de 3 unités vers la droite et de 2 unités vers le bas) ou implicitement (par exemple, "avancez de 4 unités vers le nord").
- **Opérations vectorielles** : Utilisez des opérations vectorielles pour calculer la position finale. La nouvelle position $\vec{B}$ peut être trouvée en ajoutant le vecteur de déplacement $\vec{D}$ à la position initiale $\vec{A}$.
- **Coordonnées finales** : Fournissez les coordonnées finales du point ou de l'objet après le déplacement.
- **Questions supplémentaires** : Posez des questions supplémentaires en fonction du contexte du problème. Cela pourrait inclure des questions sur la distance totale parcourue, la direction finale, ou d'autres concepts liés au déplacement.

- **Équilibrer les forces :**

Donnez aux élèves des situations impliquant des forces appliquées à un objet et demandez-leur de trouver la résultante. Ils peuvent également expliquer si l'objet est en équilibre.

- **Coordonnées et translations :**

Demandez aux élèves de résoudre des problèmes de translation en utilisant les coordonnées cartésiennes. Par exemple, demandez-leur de décrire comment une figure géométrique se déplace lorsqu'elle est soumise à des vecteurs de translation.

- **Projets de modélisation :**

Demandez aux élèves de modéliser une situation réelle en utilisant des vecteurs. Par exemple, ils pourraient modéliser le mouvement d'un objet lancé, d'une balançoire, ou même la trajectoire d'une balle de golf.

- **Exemple :**

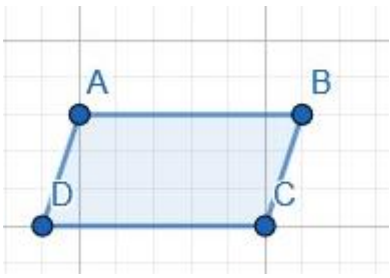
Former un parallélogramme ABCD, construire les points E, F, G et H tels que :

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$

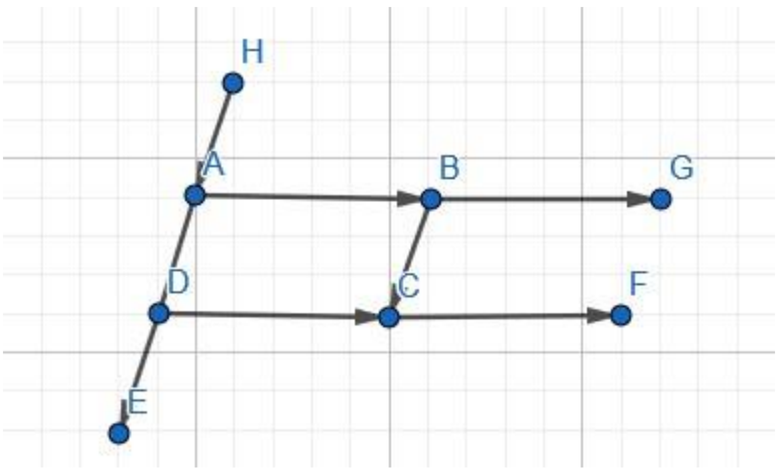
$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$



Solution :



Cofinancé par l'Union européenne

Ce projet a été financé avec le soutien de la Commission européenne. Cette publication ne reflète que les opinions de son auteur, et la Commission ne peut être tenue responsable de l'usage qui pourrait être fait des informations qu'elle contient.

Code du projet : 1-FR01-KA220-SCH-00027771

Pour en savoir plus sur Visit Math, rendez-vous sur le site Web du projet : https://visitmath.eu