VISIT MATH

Cofinancé par l'Union européenne

Le théorème de Pythagore

Sujet	Géométrie.
Objectifs d'apprentissage	Utiliser le théorème de Pythagore de différentes façons.
Tranche d'âge	12 à 16 ans (à adapter à chaque pays).
Estimation de durée	45 min.
Activités	Découvrir Pythagore et les applications de son théorème.
Visites associées	Gand, Route royale de Varsovie, Roubaix – Tourcoing, Montauban, Agen.

Connaissances préalables requises

Notions de base en géométrie.

Longueurs et mesures.

Addition et soustraction.

Carré d'un nombre.

Racine carrée.

Définition et propriétés des triangles.

Application des formules de géométrie.

Étape par étape : la séquence en classe

Étape 1 : Pythagore et son théorème

Brève présentation des éléments contextuels de cette séquence

Un peu d'histoire

La vie et l'œuvre de Pythagore sont très mal connues. Il serait né au VI -ème siècle avant notre ère à Samos, île de la mer Égée. Après un long voyage initiatique, il se serait exilé à Crotone, au sud de l'Italie actuelle. Il y fonde une école qui impose des règles de vie strictes et prend la forme d'une confrérie influente. Le pythagorisme est un mouvement philosophique, religieux et moral, mais aussi politique. On dit que Cylon, un des opposants à Pythagore, dirigea une révolte contre lui, qui sonna la fin de l'école et dispersa les adeptes du maître.

Très tôt, Pythagore devint un personnage une légende.

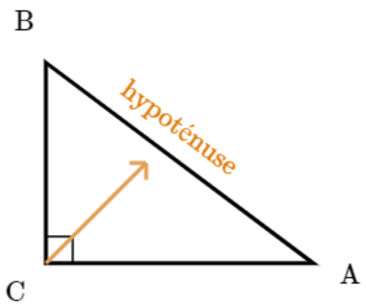
Avant de s'attacher à la définition du théorème en lui-même, il est primordial dans un premier temps de faire un rappel concernant le triangle rectangle. Puisque l'utilisation du théorème de Pythagore s'applique seulement à ce type de figure géométrique.

Le triangle rectangle :

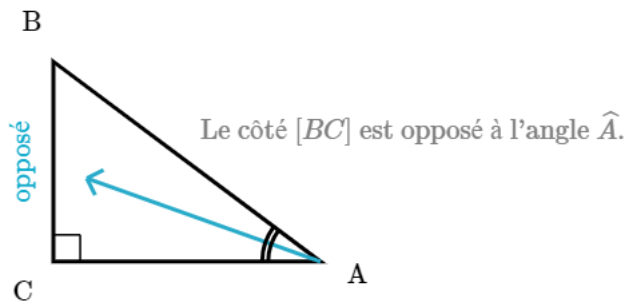
Un triangle rectangle est un triangle qui contient un angle droit c'est-à-dire un angle de 90 degrès (90°).

Les différents côtés d'un triangle portent des noms spécifiques :

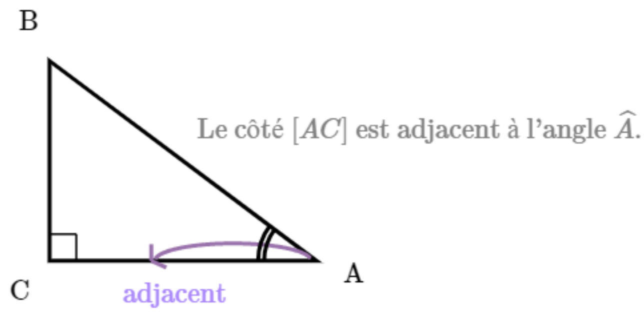
- l'hypoténuse qui est le côté en face de l'angle droit (90°). C'est le plus long des trois côtés.



- Le côté opposé, est un des côtés qui constitue l'angle droit mais est opposé à un des deux autres angles aigus.



- Le côté adjacent est un des côtés d'un angle aigu qui n'est pas l'hypoténuse.



Dans le cas du Théorème de Pythagore, l'élément principal est l'hypoténuse.

Le théorème de Pythagore :

L'énoncé du théorème de Pythagore est le suivant :

Le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Il peut être résumé par la formule suivante :

$a^2 + b^2 = c^2$

où a, b et c représentent les longueurs des côtés dans le triangle rectangle.

Ce théorème permet de calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle, lorsque les longueurs de deux autres côtés sont connues.

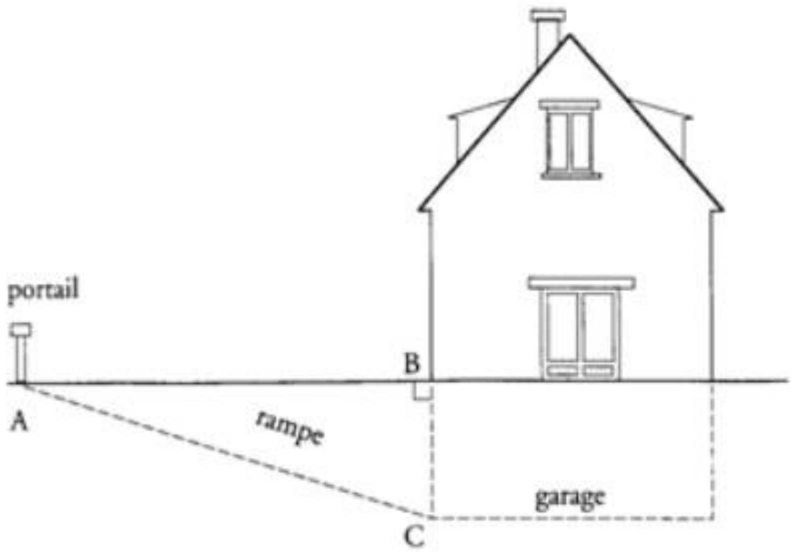
Étape 2 : activités en classe sur le théorème de Pythagore

Exemple d'exercice à faire pour comprendre la relation entre Pythagore et la vie réelle

Pour rendre les exercices plus concrets, vous pouvez les relier à des situations réelles, par exemple :

Louis habite une maison avec garage à 2,25 m sous terre. Pour s'y rendre, Louis doit suivre une rampe de 10,25 m de long.

Quelle est la distance entre le portail et l'entrée de sa maison ?



Calcul d'un côté du triangle rectangle avec la formule du théorème de Pythagore.

Considérons un triangle rectangle dont un côté mesure 6 cm et l'hypoténuse mesure 10 cm.

Pouvez-vous calculer la longueur du dernier côté ?

Soit a la longueur du dernier côté.

Servez-vous de la formule du théorème pour faire le calcul.

$10^2 = a^2 + 6^2$

$100 = a^2 + 36$

$a^2 = 100 - 36$

$a^2 = 64$

$a = 8$

Vérification qu'un triangle est bien un triangle rectangle.

Puisque ce théorème s'applique seulement au triangle rectangle nous pouvons faire une vérification.

C'est ce qu'on appelle la **réciprocité** d'un triangle, c'est-à-dire vérifier si celui-ci est bien un triangle rectangle.

La réciproque du théorème de Pythagore stipule que si les longueurs a, b et c d'un triangle vérifie l'égalité $a^2 + b^2 = c^2$, alors il s'agit bien d'un triangle rectangle dont c, est l'hypoténuse.

Comme nous savons que l'hypoténuse est le côté le plus long, nous devons faire la somme des carrés des deux plus petites longueurs et vérifier que cette somme est égale au carré du côté le plus long (l'hypoténuse).

Exemple

Considérons un triangle dont les longueurs sont 3, 4 et 5.

Saurez-vous démontrer qu'il s'agit ou non d'un triangle rectangle ?

Pour démontrer que ce triangle est un triangle rectangle, nous devons utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

Si nous appliquons la formule nous avons :

$3^2 + 4^2 = 5^2$

Décomposons ce calcul :

$9 + 16 = 5^2$

$25 = 5^2$

$25 = 25$

Ainsi, $3^2 + 4^2 = 5^2$ et par la réciproque du théorème de Pythagore, il s'agit bien d'un triangle rectangle.

Étape 3 : La corde à 13 nœuds

La corde à treize nœuds, également connue sous le nom de "corde des druides" ou "corde égyptienne", était un instrument employé dans l'Égypte ancienne. Elle représentait un outil très important pour les bâtisseurs du Moyen Âge, qui l'utilisaient pour transmettre des instructions de construction, compréhensibles par des ouvriers peu familiers avec la géométrie et les calculs. Ainsi, cet outil était utilisé pour communiquer les plans de construction aux travailleurs, facilitant ainsi la réalisation de projets architecturaux complexes.
Il s'agit d'une corde dotée de 13 nœuds, créant ainsi 12 intervalles réguliers de longueurs égales. Chaque nœud agit comme une marque sur la corde, délimitant un espace similaire à une graduation sur une règle entre chaque centimètre. Il est important de noter que le nœud n'est pas une mesure de longueur en soi, mais plutôt une référence, une sorte de graduation sur la corde.

Cet outil semble permettre l'enseignement de nombreuses notions mathématiques.
Un outil stimulant pour l'éducation :

L'intérêt de l'outil « corde à treize nœuds » provient de multiples aspects :

- la motivation des enseignants comme des élèves, curieux et intéressés par cet outil très ancien ;
- la possibilité de relier connaissances dans l'espace réel et modélisation par la géométrie ;
- la différenciation implicite entre dessin et figure, fondamentale pour la géométrie.

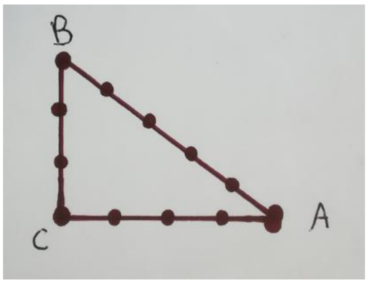
D'autres développements sont possibles, notamment pour développer des connaissances liées au cercle.
L'aspect historique revêt également une importance significative, permettant aux élèves de comprendre le parcours évolutif de la construction des connaissances, en relation notamment avec les outils disponibles au sein d'une population à une époque donnée de son histoire.

Un outil générateur d'apprentissages :

La corde à 13 nœuds est un outil dont les multiples usages permettent de faire rencontrer aux élèves des notions :

- dans le domaine de la **géométrie**, il est un puissant outil : figure plane (triangle rectangle, triangle isocèle, triangle équilatéral, carré, rectangle, losange peuvent notamment être matérialisés par la corde), figure dans l'espace, alignement, segment, droite, cercle, orthogonalité, parallélisme, polygones, symétrie, milieu. La corde permet de visualiser le carré ou le losange par la répétition de 4 nombres identiques (3+3+3+3), les rectangles ou parallélogrammes par la répétition d'une paire de nombres (1+5+1+5 et 2+4+2+4) , les trapèzes isocèles par un même nombre à deux places non consécutives (1+3+5+3 ou 2+3+2+5), le triangle équilatéral (4+4+4) ou le triangle isocèle (2+5+5) qui compte cinq intervalles sur deux de ses côtés et deux intervalles sur sa base ou le triangle rectangle (3+4+5) avec son angle droit et ainsi découvrir les propriétés permettant de différencier les figures entre elles.

Exemple de triangle rectangle avec la corde à 13 nœuds :



- dans le domaine des **grandeurs et mesures** : longueur, périmètre, aire, existence d'un polygone de dimensions données (inégalité triangulaire);
- dans le domaine **numérique** : décomposition additive du nombre 12, comparaison de nombres,… La corde à 13 nœuds permet d'additionner, soustraire, multiplier, diviser sans calcul ! Par exemple, plier la corde de façon à avoir, sur chaque pli, quatre intervalles, permet d'observer que 3 plis fois 4 intervalles = 12 intervalles. Elle est aussi un autre prétexte pour travailler les fractions.

Étape 4 : pour aller plus loin et idées d'activités à la maison

Exemple d'exercices à faire pour comprendre la relation Corde à 13 nœuds / théorème de Pythagore

Général : comment démontrer le théorème de Pythagore avec une corde à 13 nœuds ?

On utilise une corde pourvue de treize nœuds à égale distance, comportant donc douze intervalles identiques. Une personne tient les deux nœuds des extrémités. Une autre tient le 4e nœud, une dernière le 7e nœud. En tendant la corde, ils obtiennent un triangle rectangle parfait.

Pourquoi ? Parce que l'un des côté compte 3 unités de mesure (intervalles), l'autre 4, et l'hypoténuse, 5.

$\mathbf{3^2 + 4^2 = 5^2}$

Le théorème de Pythagore est bien vérifié, le triangle obtenu est un triangle rectangle, pourvu d'un angle droit.

Exemples de consigne :

1/ Les Egyptiens savaient vérifier que des angles étaient droits grâce à une corde à 13 nœuds régulièrement espacés. Expliquer pourquoi, et comment, on peut vérifier qu'un angle est droit à l'aide d'une corde à 13 nœuds.

2/ Imaginez une corde à 13 nœuds tendue entre deux arbres, formant ainsi un triangle rectangle avec le sol. Si la corde mesure 15 unités et que l'un des côtés adjacents au coin droit de la corde mesure 9 unités, déterminez la longueur du côté opposé au coin droit en utilisant le théorème de Pythagore.

3/ Un explorateur se déplace dans la jungle en utilisant une corde à 13 nœuds comme guide. Après avoir marché 8 unités vers l'est, puis 5 unités vers le nord, quelle distance a-t-il parcourue en ligne droite depuis son point de départ ?

Ces exercices permettent d'appliquer le théorème de Pythagore en utilisant la corde à 13 nœuds dans différents contextes. Vous pouvez résoudre ces problèmes en identifiant les côtés d'un triangle, en appliquant le théorème de Pythagore et en utilisant les propriétés des triangles rectangles.

Autres activités à demander aux élèves :

- fabriquer un triangle rectangle
- fabriquer un triangle isocèle
- fabriquer un triangle équilatéral
- fabriquer un carré
- fabriquer un rectangle

Matériel nécessaire à la visite

Une corde à 13 nœuds dans le cas où vous souhaitez utiliser cette méthode.

Cofinancé par
l'Union européenne

Ce projet a été financé avec le soutien de la Commission européenne. Cette publication ne reflète que les opinions de son auteur, et la Commission ne peut être tenue responsable de l'usage qui pourrait être fait des informations qu'elle contient.

Code du projet : 1-FR01-KA220-SCH-00027771

Pour en savoir plus sur Visit Math, rendez-vous sur le site Web du projet : https://visitmath.eu

FERMAT SCIENCE
Une autre idée des maths

5th HIGH SCHOOL
Agrinio-Greece

ISTITUTO STATALE "E. MONTALE" PONTEDERA

LogoPsyCom

ZS 31

YuzuPulse