VISIT MATH

Cofinancé par l'Union européenne

Algèbre

Sujet	Équation à 1 ou 2 variables
Objectifs d'apprentissage	Reporter des points dans un système de coordonnées cartésiennes Résoudre des équations à deux variables Résoudre des problèmes de maximum/minimum avec des fonctions quadratiques Trouver les équations de coniques à partir de données et vice versa
Tranche d'âge	14 à 18 ans (à adapter à chaque pays)
Durée estimée	2 heures
Activités	Recherche de points particuliers sur des ellipses et des paraboles dans des situations réelles
Visites liées au sujet	Pise, Lucca

Connaissances antérieures requises

Connaître le plan cartésien comme système de référence des coordonnées ; savoir reconnaître le type de conique lorsqu'elle est mise en forme normale.

Étape par étape : la séquence en classe

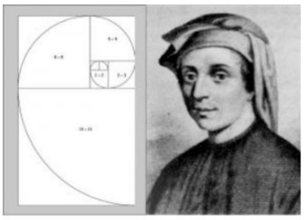
Étape 1 : Introduire le sujet

Les équations à deux inconnues relèvent de plusieurs domaines mathématiques : l'analyse, la géométrie, ou encore l'algèbre. Il s'agit d'équations en x et y.
Les solutions sont uniquement constituées de toutes les paires ordonnées (x ; y) qui rendent l'égalité vraie. L'ensemble de ces solutions correspond à un lieu géométrique dans le plan cartésien. Nous nous concentrerons sur la parabole et l'ellipse.

Brève présentation des éléments contextuels de cette séquence

Al-Khwarizmi – Père de l'algèbre - olympic.uz

Les équations ont été introduites pour la première fois au IXe siècle après J.-C. par l'astronome mathématicien perse Al-Khwarizmi afin de résoudre des problèmes mercantiles ou des problèmes de partage d'héritage.



Léonard de Pise - La tecnica della scuola

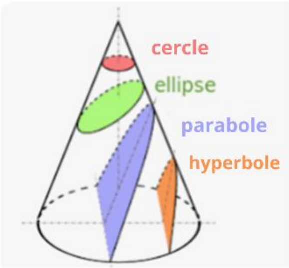
L'algèbre classique, en revanche, est née et s'est développée dans le monde arabe. En Italie, il a fallu attendre le XIe siècle pour voir apparaître des écoles d'abaques, auxquelles Léonard de Pise, dit Fibonacci, a apporté une contribution remarquable.

Plus tard, à la Renaissance, de grands algébristes tels que Pacioli, Cardano et Bombelli sont apparus.

Descartes - Shutterstock

Ce n'est que plus tard, au XVIIe siècle, que le symbolisme, que nous connaissons et utilisons encore aujourd'hui, a été introduit par Descartes. C'est précisément à partir de ce moment-là, grâce à lui et à Fermat, que l'algèbre a fusionné avec la géométrie. En 1637, Descartes a introduit la géométrie analytique et a affirmé que les équations du 2e degré étaient précisément les coniques étudiées par Apollonius (262-190 av. J.-C.). Avec l'introduction des nouvelles méthodes algébriques liées au plan cartésien, Descartes et Fermat parviennent à résoudre plus simplement les problèmes qui se posent à eux et à vérifier les propriétés des coniques. En réalité, ces dernières avaient été découvertes auparavant par Ménechme (380-320 av. J.-C.), alors qu'il tentait de résoudre le problème de la duplication du cube.

Ménechme a été le premier à démontrer que les coniques pouvaient être obtenues en coupant un cône avec un plan (d'où le nom de coniques). Plus tard, Apollonius démontra qu'elles pouvaient également être obtenues à partir d'un cône de révolution, en l'intersectant avec un plan dont l'inclinaison varie. C'est également à lui que l'on doit les noms de parabole, d'ellipse et d'hyperbole. Après Apollonius, l'étude des coniques fut abandonnée.

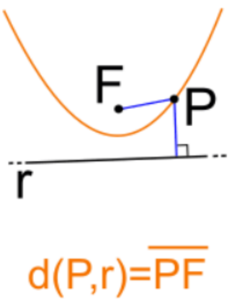


Elles sont ensuite réapparues à la Renaissance, dans l'art, avec la perspective, puis au Baroque, où les lignes courbes (ellipses) occupaient une place privilégiée.

Liens entre ces éléments et les mathématiques

Il existe quatre types de coniques : la parabole, le cercle, l'ellipse et l'hyperbole. Deux applications importantes à des situations réelles (pour déterminer le maximum et le minimum ou pour des problèmes acoustiques) concernent spécifiquement les paraboles et les ellipses, coniques sur lesquelles nous allons nous concentrer.

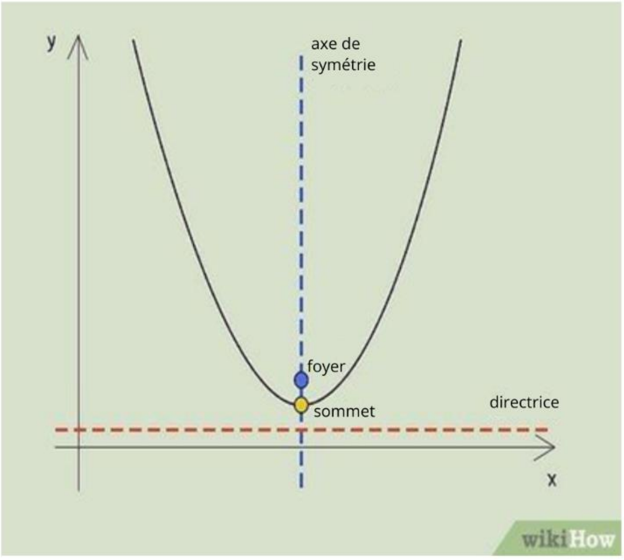
La parabole est le lieu géométrique des points du plan P équidistants d'un point donné, appelé foyer (F) et d'une droite donnée (r), appelée directrice.



À partir de la définition, nous pouvons déterminer, par quelques étapes algébriques, l'équation de la parabole :

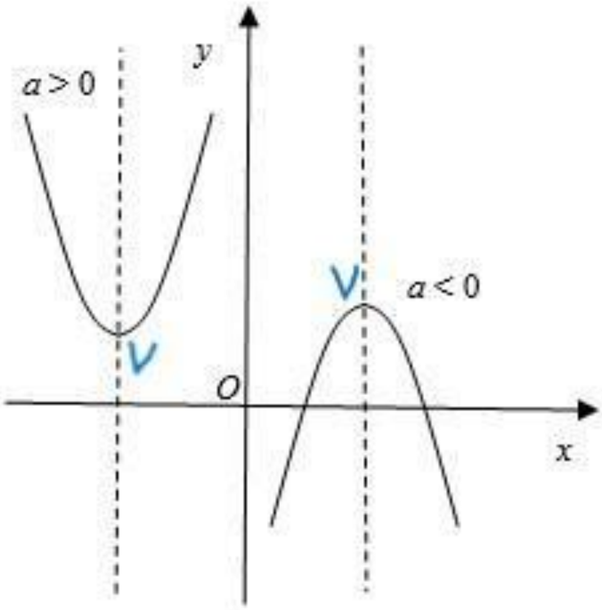
$$y = ax^2 + bx + c$$

Les paraboles ayant cette équation ont un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées :



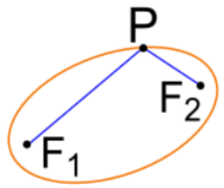
Si a>0, la concavité est orientée vers le haut et le sommet V est le point le plus bas.

Si a<0, la concavité est orientée vers le bas et le sommet V est le point le plus élevé.



$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

L'ellipse est le lieu géométrique des points du plan P dont la somme des distances de ces points à deux points fixes, appelés foyers (F_1 et F_2), est une constante.



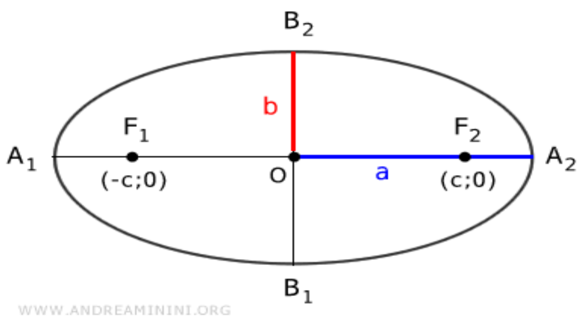
$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=$ constante

À partir de la définition, nous pouvons déterminer, par quelques étapes algébriques, l'équation de l'ellipse sous forme normale :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

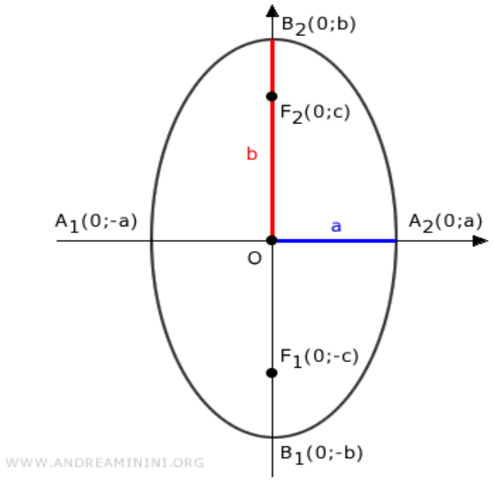
a et b sont les longueurs des demi-axes.

Si a>b, les foyers se trouvent sur l'axe x :



$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

Si a<b, les foyers se trouvent sur l'axe y :



$$c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

Étape 2 : Activités à réaliser en classe

Exercice 1

Défi : vous ne disposez que de 320 m de clôture et vous souhaitez clôturer le plus de terrain possible. Elle doit être rectangulaire. Quelle doit être la longueur des côtés de ce rectangle ?

Si l'on prend L_1 = 10 m et L_2 = 150 m, le rectangle aura une aire de...

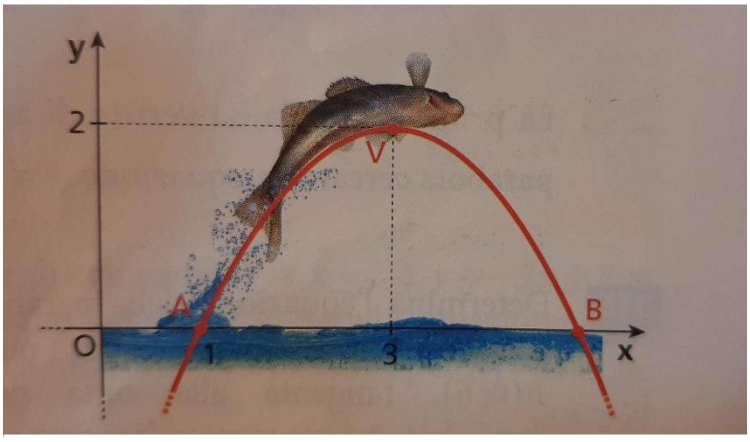
Si l'on prend L_1 = 20 m et L_2 = 140 m, le rectangle aura une aire de...

Attention, n'oubliez pas que le périmètre doit être de 320 m : $2L_1 + 2L_2 = 320$ m, donc $L_1+L_2 = 160$ m.

Après avoir effectué quelques suppositions et vérifications, essayez de résoudre le même problème en utilisant x comme inconnue pour l'un des côtés (par conséquent l'autre sera 160 - x) et en obtenant la parabole associée à la formule de l'aire : y = x(160 - x). Quel point particulier de cette parabole correspond à la solution du problème ?

Exercice 2

Observez la trajectoire du poisson. Reconnaissez-vous une courbe particulière ? Que représente le point le plus haut de cette courbe ? Déterminez les coordonnées de ce point. Trouvez ensuite l'abscisse du point B, où le poisson rentre dans l'eau.
*Défi : essayez de déterminer l'équation de la courbe qui décrit la trajectoire du poisson.

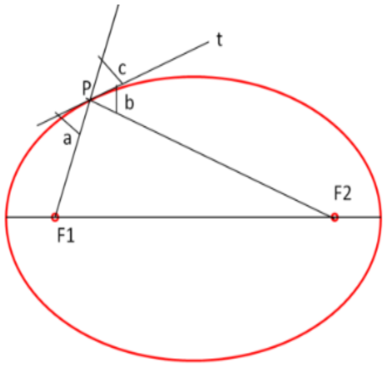


Exercice 3

Essayez de dessiner une ellipse en vous basant sur les caractéristiques du lieu géométrique. Prenez une feuille de papier et percez deux trous (qui correspondront aux deux foyers). Coupez un morceau de ficelle de la longueur désirée et attachez-la aux deux trous. Fixez-la bien au dos de la feuille avec du ruban adhésif. Ensuite, à l'aide d'un crayon, en tirant sur la ficelle jusqu'à ce qu'elle soit tendue, dessinez l'ellipse sur la feuille. Le lien suivant vous permet de visionner une vidéo qui illustre cette opération : [https://www.youtube.com/shorts/nKqfHrYFne8.](https://www.youtube.com/shorts/nKqfHrYFne8)

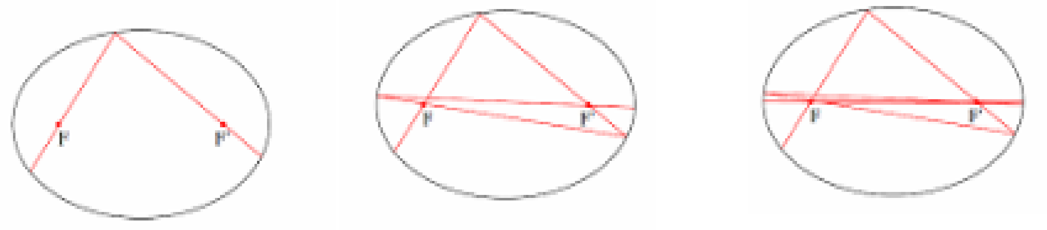
Tracez la trajectoire d'une boule de billard sur l'ellipse dessinée et calculez la trajectoire du rebond sur l'ellipse sachant que le rebond a le même angle que la perpendiculaire de la trajectoire d'arrivée.

VISIT MATH
Cofinancé par l'Union européenne



Où les balles qui partent d'un foyer arrivent-elles après le premier rebond ?

Utilisez le rapporteur pour calculer l'angle avec précision.



Exercice 4

Sur cette photo du Colisée, nous pouvons voir une structure en forme d'ellipse. La longueur maximale (grand axe) de l'amphithéâtre est d'environ 188 m, tandis que sa largeur maximale (petit axe) est d'environ 156 m. Trouvez l'équation de l'ellipse qui représente le contour extérieur du bâtiment en choisissant le centre de l'ellipse comme origine du système de référence et le grand axe comme axe des abscisses. Où se trouvent les foyers dans ce système de référence ?

Bergamini-Barozzi-Trifone-Lineamenti di matematica.azzurro-vol.3

Étape 3 : Devoirs et idées de développement

Exercice 1

Un fil de 20 cm de long est coupé en deux. Avec les deux morceaux obtenus, deux carrés sont formés. À quel endroit faut-il couper le fil pour que la somme des carrés soit minimale ?

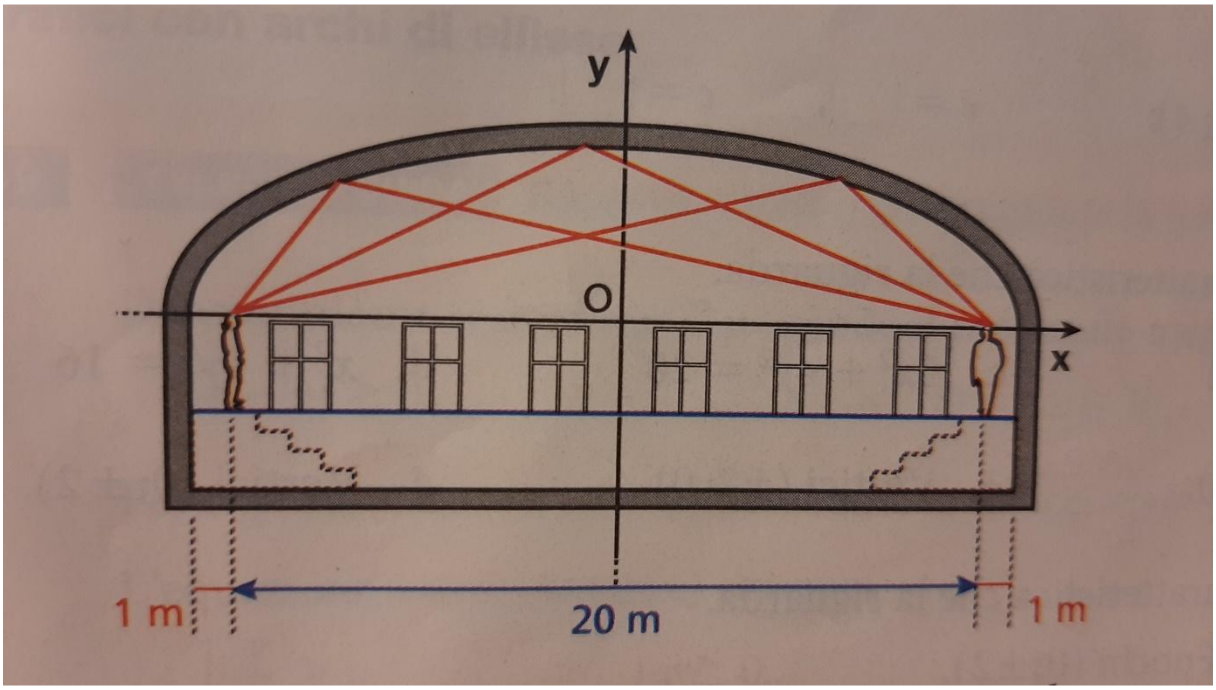
Exercice 2

Vous voyez une fenêtre rectangulaire surmontée d'un demi-cercle dont le diamètre coïncide avec l'un des côtés du rectangle. Si le périmètre de la fenêtre est de 24 m, déterminez le rayon du demi-cercle pour que la lumière entrant par la fenêtre soit maximale.

Exercice 3

Une voûte ellipsoïdale a la propriété acoustique permettant à deux personnes se trouvant aux foyers de l'ellipse de parler à voix basse en se tournant le dos et de très bien s'entendre, comme si elles se trouvaient l'une à côté de l'autre. Cela est causé par la réflexion des ondes acoustiques sur les parois de la voûte. Sur l'image suivante, nous voyons deux personnes tournées vers les foyers de l'ellipse. Trouvez son équation.

(D'après le dessin, vous pouvez obtenir la longueur du grand axe, 2a, et la distance focale, 2c. Comment pouvez-vous obtenir b ?)



Bergamini-Barozzi-Trifone-Lineamenti di matematica.azzurro-vol.3

Matériel nécessaire pour la visite

Ficelle, feuilles, ciseaux, ruban adhésif, rapporteur, crayons.

VISIT MATH

Cofinancé par l'Union européenne

Ce projet a été financé avec le soutien de la Commission européenne. Cette publication ne reflète que les opinions de son auteur, et la Commission ne peut être tenue responsable de l'usage qui pourrait être fait des informations qu'elle contient.

Code du projet : 1-FR01-KA220-SCH-00027771

Pour en savoir plus sur Visit Math, rendez-vous sur le site Web du projet : https://visitmath.eu

FERMAT SCIENCE
Une autre idée des maths

5th HIGH SCHOOL
Agrinio-Greece

ISTITUTO STATALE "E. MONTALE" PONTEDERA

LogoPsyCom

YuzuPulse