VISIT MATH

Cofinancé par l'Union européenne

# Suites arithmétiques et suites géométriques

| | |
|---|---|
| **Sujet** | Les suites |
| **Objectifs d'apprentissage** | Application des séquences mathématiques dans des calculs pratiques |
| **Tranche d'âge** | 14-18 ans |
| **Durée estimée** | 2 heures |
| **Activités** | Utiliser les suites mathématiques dans un cadre financier |
| **Visites liées au sujet** | Agen, Amiens, Lille, Lucca, Varsovie |

## Connaissances antérieures requises

L'élève doit savoir :

- Calculer le prochain terme d'une suite arithmétique si on lui donne le premier terme et la raison ;
- Calculer le prochain terme d'une suite géométrique si on lui donne le premier terme et la raison ;
- Appliquer des formules pour calculer la somme des n premiers termes d'une séquence

# Étape par étape : la séquence en classe

## Étape 1 : Introduire le sujet

### Présentation des éléments culturels de la séquence

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) était un scientifique et inventeur allemand qui a montré des capacités mathématiques exceptionnelles dès son plus jeune âge. D'après la légende, quand Gauss avait 7 ans, son professeur a demandé aux élèves de calculer la somme des nombres naturels de 1 à 50 (qui forment une suite arithmétique avec le premier terme et la différence commune égale à 1). Le professeur imaginait sans doute que cette tâche prendrait beaucoup de temps, et lui permettrait de terminer sa journée dans le calme. Malheureusement pour lui, le jeune Gauss donna la bonne réponse en un rien de temps. Son raisonnement était le suivant : il a écrit les nombres de 1 à 50, puis en dessous, les mêmes nombres dans l'ordre inverse, et les a additionnés :

$$\begin{array}{r}
1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 49 + 50 \\
+ \quad 50 + 49 + 48 + 47 + \ldots + 2 + 1 \\
\hline
51 + 51 + 51 + 51 + \ldots + 51 + 51 = 51 * 50
\end{array}$$

De cette manière, il a obtenu un nombre deux fois plus grand que le résultat. Ainsi :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 49 + 50 = \frac{51 * 50}{2} = 1275$$

VISIT MATH

Cofinancé par l'Union européenne

## Lien avec les éléments pédagogiques

La méthode de Gauss pour calculer la somme des 50 premiers nombres entiers peut être utilisée pour calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

*$S_n$- somme des n premiers termes de la suite*

*$a_1$- premier terme de la suite*

*$a_n$- dernier terme de la suite*

Dans le cas de ce que Gauss a calculé, on peut dire que :

*$a_1+a_n=51$*, avec *$n=50$*.

Rappelons la formule pour calculer le prochain terme d'une suite arithmétique :

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Où ***r*** est la raison.

Une suite géométrique, en revanche, est une suite comportant au moins trois termes et dont chaque terme à partir du second est obtenu en multipliant le précédent par la raison.

Un exemple de ce genre de suite est : -1, 2, -4, 8, … où le premier terme $a_1 = -1$ et la raison (q) est (-2).

Pour obtenir les termes suivants d'une suite géométrique, on utilise cette formule :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

La formule pour découvrir la somme des n premiers termes d'une suite géométrique est :

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

*$S_n$- somme de n premiers termes de la suite*

*$a_1$- premier terme de la suite*

*q – raison*

VISIT MATH

Cofinancé par l'Union européenne

# Étape 2: Activités à faire en classe

## Échauffement

1. On étudie une suite arithmétique telle que $a_1 = 16$ et r=-2. Calculez $a_{50}$ et la somme des 50 premiers termes de la suite.
2. Vérifiez si les nombres : $14,\ 2,\ \frac{2}{7},\ \frac{1}{2}$ forment une suite géométrique.

## Argent de poche

Imaginez qu'un proche très riche vous rende visite et vous promette de vous donner de l'argent de poche tous les mois pendant deux ans. Il vous propose deux options :

| **Option 1 :** | **Option 2 :** |
|---|---|
| Vous recevez **€100** le premier mois, et chaque mois vous recevrez 50€ de plus que le mois précédent. | Vous recevrez **€2** le premier mois, puis vous recevrez chaque mois 50% de plus que le mois précédent. |

Quelle option choisiriez-vous ?

Calculons d'abord l'argent de poche que vous recevriez chaque mois. $K_n$ représente l'argent de poche (en €) reçu au mois n. Vos résultats doivent ressembler à ceci :

| Option 1 : | Option 2 : |
|---|---|
| $K_1 = 100$<br>$K_2 = K_1 + 50 = 100 + 50$<br>$K_3 = K_2 + 50 = 100 + 2 * 50$<br>$K_4 = K_3 + 50 = 100 + 3 * 50$<br>$\dots$<br>$K_n = K_{n-1} + 50 = 100 + (n-1) * 50$ | $K_1 = 2$<br>$K_2 = K_1 * 1{,}5 = 2 * 1{,}5$<br>$K_3 = K_2 * 1{,}5 = 2 * 1{,}5^2$<br>$K_4 = K_3 * 1{,}5 = 2 * 1{,}5^3$<br>$\dots$<br>$K_n = K_{n-1} * 1{,}5 = 2 * 1{,}5^{n-1}$ |

Les versements successifs de la première option forment une suite arithmétique (dont le premier terme $K_1$=100 et la raison r=50), et la deuxième option est une suite géométrique (dont le premier terme $K_1$=2 et la raison q=1.5).

### Exercice 1

Remplissez le tableau pour trouver combien d'argent de poche vous recevrez pendant chaque mois de la première année :

| Mois | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Option 1** | 100 | 150 | 200 | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | 650 |
| **Option 2** | 3 | 4.5 | 6.75 | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | 173 |

Ce tableau montre la somme d'argent de poche que vous recevrez le premier et le dernier mois des deux années :

| | Option 1 : | Option 2 : |
|---|---|---|
| $K_{12}$ | 100+11*50=650 | $2*1{,}5^{11} \approx 173$ |
| $K_{24}$ | 100+23*50=1 250 | $2*1{,}5^{23} \approx 22\,445$ |

Si on choisit l'option 1, la somme d'argent perçue le dernier mois de la première année est plus importante que pour l'option 2. Cependant, à la fin de la deuxième année, le dernier versement de l'option 2 est nettement supérieur à l'option 1.

Calculons la somme des versements pour les deux options. Nous utiliserons les formules pour calculer la somme des n premiers termes des suites arithmétique et géométrique.

| Option 1 : | Option 2 : |
|---|---|
| $S_{24} = \frac{K_1 + K_{24}}{2} * 24 = \frac{100 + 1250}{2} * 24 = 22\,800$ | $S_{24} = K_1 * \frac{1 - q^{24}}{1 - q} = 2 * \frac{1 - (1{,}5)^{24}}{1 - 1{,}5} \approx 67\,332$ |

L'option 2, qui semble initialement moins intéressante, est finalement beaucoup plus rentable que l'option 1.

Ces deux options nous permettent de nous entrainer sur les deux méthodes de calcul principales pour calculer les taux d'intérêt de nombreuses opérations bancaires.

Penchons-nous sur l'option 2.

Avec cette méthode, l'intérêt est calculé selon le capital enrichi de la période précédente. Si le capital initial est $K_0$ et le taux d'intérêt p%, après chaque période le capital est de :

Après la première période : $K_1 = K_0 + \frac{p}{100} K_0 = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

Après deux périodes : $K_2 = K_1 + \frac{p}{100} K_1 = K_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$

Après n périodes : $K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Cette méthode pour calculer les intérêts (le profit) est utilisée pour calculer les intérêts des comptes bancaires. Quand la banque rajoute les taux d'intérêt au capital (somme sur le compte bancaire), on dit que l'intérêt est composé.

Note : Dans les exercices suivants, lorsqu'on parle d'intérêt sur les comptes bancaires, nous ne prenons pas en compte les taxes qui peuvent s'appliquer. Nous supposerons que le taux d'intérêt est net.

## Exercice 2

On dépose 10.000€ sur un compte au taux d'intérêt de 4% par annuité. Calculez la somme disponible sur le compte après 5 ans si le propriétaire n'effectue aucun prélèvement ou versement.

| | |
|---|---|
| **$K_0$ = € 10 000** | **$K_0$ - somme déposée** |
| p% = 4% | p - taux d'intérêt annuel |
| n = 5 | n – nombre d'années |
| | $K_5$ – somme disponible après 5 ans |

$$K_5 = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 = 10\,000\left(1 + \frac{4}{100}\right)^5 = ?$$

A-t-on gagné plus de 2.000€ grâce à ce compte ?

Pour les dépôts d'une durée inférieure à 1 an, la banque capitalise les intérêts après chaque période de la durée du dépôt. Par exemple, si nous laissons de l'argent dans un dépôt de 3 mois pendant 2 ans, les intérêts seront calculés tous les 3 mois, soit dans ce cas, 8 fois. Nous devons également prendre cela en compte pour déterminer le taux d'intérêt (p). Nous en discuterons dans le prochain exercice.

### Exercice 3

On dépose €30,000 dans un dépôt de 2 mois. Le taux d'intérêt de ce dépôt est de 5% par annuité. Quelle somme sera disponible sur ce compte après un an et demi ?

$K_0$ = € 30 000

n = 9 (1.5 ans = 18 mois, le dépôt est de 2 mois)

$$p\% = \frac{2}{12} * 5\% = \frac{5}{6}\%$$

Calculez les intérêts perçus pour la période donnée.

Utilisez la formule suivante pour calculer : $K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ Solde du compte après 18 mois :

$$K_9 = 30\,000\left(1 + \frac{5}{6 * 100}\right)^9 = ?$$

## Étape 3 : Pour aller plus loin et idées de travail à la maison

Karol, qui a 25 ans, prévoit de déposer 100€ chaque mois dans un plan d'épargne retraite. Le taux d'intérêt de ce plan est de 6% par annuité, et les intérêts sont verses chaque mois. Quelle somme aura accumulé Karol à 65 ans ?

# Matériel nécessaire pour la visite

Calculatrice

VISIT MATH

Cofinancé par l'Union européenne

Ce projet a été financé avec le soutien de la Commission européenne. Cette publication ne reflète que les opinions de son auteur, et la Commission ne peut être tenue responsable de l'usage qui pourrait être fait des informations qu'elle contient.

**Code du projet :** 1-FR01-KA220-SCH-00027771

**Pour en savoir plus sur Visit Math, rendez-vous sur le site Web du projet :** https://visitmath.eu



FERMAT SCIENCE Une autre idée des maths · 5th High School Agrinio-Greece · Istituto Statale "E. Montale" Pontedera · LogoPsyCom · ZS 31 · YuzuPulse