



VISIT MATH



Cofinancé par  
l'Union européenne

# Itinéraire



- 1 Camposanto
- 2 Cathédrale
- 3 La Tour
- 4 Château de la Caravane
- 5 Le Château de l'Horloge
- 6 Tuttomondo

Financé par l'Union européenne. Les points de vue et avis exprimés n'engagent toutefois que leur(s) auteur(s) et ne reflètent pas nécessairement ceux de l'Union européenne ou de l'Agence exécutive européenne pour l'éducation et la culture (EACEA). Ni l'Union européenne ni l'EACEA ne sauraient en être tenues pour responsables.

Code projet : 2022-1-FR01-KA220-SCH-000090275



Ce travail est soumis à la licence internationale Creative Commons Attribution NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).



VISIT MATH



Cofinancé par  
l'Union européenne

# VisitMath Visite de Pise



## Étape 1 : Découvrez la mathémagie

Vous êtes en deuxième année à l'école de mathémagie et votre professeur d'algèbre runique vous confie une mission importante : retrouver les runes dissimulées dans la ville de Pise.



Attention : les runes sont protégées par de puissants sortilèges que seul un mathémagicien d'exception peut briser !

Il existe quatre types de runes, chacune liée à un trait de la mathémagie.



Symmetria



Variabilis



Balansius



Sequentia

Pour rompre le sortilège protégeant les runes, vous devrez résoudre les exercices proposés dans les bulles comme celles-ci. Si vous trouvez la solution, vous obtiendrez les runes inscrites sur le côté !



Prenons un ensemble de 10 runes, qui comporte au moins 2 runes de chaque type. Combien y a-t-il de combinaisons différentes ?



Comme vous n'avez pas à vous préoccuper de l'ordre des runes, vous savez déjà que 8 des 10 runes sont déterminées (2 de chacun des 4 types). Il vous suffit donc de compter combien de combinaisons des 2 runes restantes vous pouvez avoir.



Vous pouvez maintenant vous rendre au Camposanto pour commencer la visite.

## Étape 2 : Sur la séquence

La mission part d'un lieu particulier, le Camposanto de Pise. Vous savez que certaines runes sont protégées par un enchantement magique très puissant qui remonte à plusieurs siècles.



Le cimetière de la cathédrale de Pise, commencé en 1277 par Giovanni di Simone, est le dernier des édifices monumentaux de la place des Miracles. Il est appelé "Campo Santo" (Champ Saint) car on croyait que la Terre Sainte du Golgotha avait été apportée ici par des bateaux pisans revenant victorieux de la troisième croisade. L'extérieur est en marbre blanc, avec 43 arcs aveugles et deux portes d'entrée. L'entrée principale est ornée d'un élégant tabernacle gothique au-dessus du portail. L'intérieur présente un cloître évocateur avec des arcs en ogive. Les couloirs abritent de nombreux sarcophages romains utilisés pour l'enterrement de personnalités importantes.

Les runes sont protégées par un sort jeté par Fibonacci lui-même ! Parviendrez-vous à le briser en résolvant les trois défis ?

Le Camposanto abrite la statue de Leonardo Fibonacci, ou Leonardo Pisano, qui a introduit le système des chiffres arabes en occident et est célèbre pour la séquence mathématique où "chaque nombre est le résultat des deux nombres précédents".

### Algèbre

Il y a trois termes consécutifs dans une suite, la somme du premier et du troisième est égale à 843, le deuxième terme est 377. Calculez le troisième terme.



### Probabilités

Considérons un nombre aléatoire choisi parmi les 20 premiers termes de la suite de Fibonacci. Calculez la probabilité qu'il s'agisse d'un nombre pair.




### Analyse

Calculez les 15 premiers termes de la suite de Fibonacci sur une feuille à part et dessinez un graphique des termes.



Statue de Fibonacci

 Vous pouvez maintenant vous rendre sur la Piazza dei Miracoli, à la recherche d'autres runes !



### Étape 3 : Affrontez la bête

Des runes sont  
incrystées dans le  
mur de la cathédrale.  
On dirait qu'elles sont  
là depuis des siècles !



La cathédrale a été conçue par le génie de Busketo (dont les restes reposent dans un sarcophage romain, qui fait partie de la façade) et a été construite à partir de 1063. Elle a été dédiée à l'Assomption en l'honneur de la victoire de Palerme, qui s'est déroulée entre le 13 et le 18 août de cette année-là. Son style est unique, défini comme l'art roman pisan. La façade est un chef-d'œuvre de Rainaldo (bien que de nombreuses frises et chapiteaux soient attribués à Guglielmo et Biduino), développée avec des arcs aveugles, ornée de losanges et d'incrystations, surmontée de quatre ordres de loggias accessibles au public. L'église mesure environ 100 mètres de long et 70 mètres de large et est définie comme la troisième plus grande église de l'Europe du XI<sup>e</sup> siècle, après Saint-Pierre et Saint-Paul (exception faite des église de Rome).

Vous pouvez apercevoir de nombreux petits trous dans un morceau de marbre placé sur le flanc nord de la cathédrale. De nombreuses personnes s'y arrêtent et tentent de les compter, mais il semble que l'on obtienne à chaque fois un nombre différent. Un mystère entoure l'origine de ces petits trous, connus sous le nom d'"Unghiate" ou clous du diable. La légende veut que le diable ait grimpé le long du flanc de la cathédrale jusqu'au toit pour empêcher sa construction, avant d'être expulsé par la force divine, laissant une marque indélébile sur la pierre.



En réalité, la créature qui a laissé les clous est l'Avatar de l'Incomptable, qui a imprégné le mur d'un puissant enchantement : quiconque regardera les trous pour les compter se trompera ! La mathémagie vous aidera : deux habitants de la région, Alice et Bob, ont compté les trous pour vous.



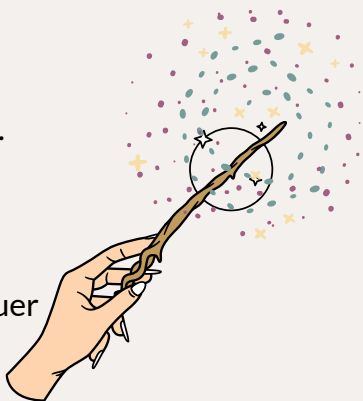
Alice compte 3 clous de plus, Bob en compte 2 de moins. Le double du nombre de clous comptés par Alice plus la moitié du nombre de clous comptés par Bob est égal à 380. Combien de clous le mur a-t-il réellement ?





## Étape 4 : Tenez la tour

Comment tient-elle debout ? L'étrange tour est imprégnée d'un puissant sortilège mathématique qui l'empêche de tomber. Comprendre ce sortilège vieux de plusieurs siècles permettra de débloquent les runes incrustées dans ses fondations.



Le 9 août 1173, les travaux de construction du clocher de la cathédrale de Santa Maria commencent. Il s'agit d'un clocher indépendant, d'environ 56 mètres de haut et pesant 14 453 tonnes. C'est probablement sous la direction de l'architecte Diotisalvi, qui avait commencé la construction du baptistère voisin, que la construction de la tour a débuté. Les travaux ont été interrompus au niveau du troisième anneau en raison de l'affaissement du sol sur lequel reposent les fondations de la tour.

L'instabilité du sol, aggravée par la crue historique des méandres de l'Auser à proximité de la tour, a rendu le sol instable, ce qui a été à l'origine de l'inclinaison de la tour et donc de sa célébrité.

Ces problèmes de stabilité ont considérablement entravé l'avancement des travaux pendant une longue période. La construction a repris en 1275 sous la direction de Giovanni di Simone et Giovanni Pisano, qui ont ajouté trois étages supplémentaires aux trois anneaux d'origine. Dans le but de redresser la tour, les trois étages ajoutés ont tendance à pencher dans la direction opposée à l'inclinaison.

L'inclinaison exacte de la tour est de  $3,97^\circ$ .

Etant donné que le diamètre à la base est de 15,484 mètres, quelle est la différence de hauteur entre le point le plus bas et le point le plus haut de la base ?



Sachant que la tour mesure 56,705 mètres de haut si l'on considère le point le plus haut du dernier anneau, ou 55,863 mètres si l'on considère le point le plus bas du dernier anneau, quel est le rayon de cet anneau ?



La mission se poursuit sur la Piazza dei Cavalieri

## Étape 5 : La meilleure école

Sur la Piazza dei Cavalieri, vous arrivez devant le Palais de la Caravane, qui abrite la plus puissante école de mathématique de Pise ! Serez-vous à la hauteur du prestige de l'école ?



Le Palais de la Caravane est l'un des bâtiments de la Piazza dei Cavalieri à Pise. Autrefois siège de l'Ordre des Chevaliers de Saint Étienne, il est depuis 1846 le siège principal de la Scuola Normale Superiore de Pise. La création de la Scuola Normale date du décret napoléonien du 18 octobre 1810 concernant les "établissements d'enseignement public" en Toscane, qui a établi l'institution de Pise en tant qu'"internat académique" pour les étudiants de l'université. Dans le domaine des mathématiques, de nombreuses sommités ont fréquenté la Scuola Normale, dont la médaille Fields 2023 dans le domaine du transfert optimal, Alessio Figalli.

Alors que vous entrez dans l'école, un professeur vous met au défi.



Maintenant, au lieu d'un problème de transfert optimal, vous devez résoudre un problème d'optimisation du transfert !

**Parviendrez-vous à résoudre le problème et obtenir les runes ?**

Une compagnie aérienne, sur un vol de  $n$  passagers, supporte un coût de carburant de  $40\,000 + n^2$  € et fixe le prix du billet par passager à  $400 + 6000/n$  €. Quel est le nombre optimal de passagers qu'elle devrait avoir pour maximiser son profit ?



Lorsque vous écrivez correctement la fonction du coût, elle forme une parabole, de sorte que le maximum est un point spécifique de cette parabole... son sommet !

## Étape 6 : Le chiffrement de l'horloge

Alors que vous vous trouvez sur la Piazza dei Cavalieri, vous remarquez un bâtiment particulier, imprégné d'énergies mathématiques obscures.



Le Palais de l'Horloge, situé sur la Piazza dei Cavalieri, est un ancien bâtiment médiéval qui a abrité le Capitaine du peuple à partir de 1357, et qui appartenait auparavant à la famille Gualandi. Lorsque le palais a été construit, il a également incorporé la célèbre tour de la Muda, surnommée "Tour de la faim", qui avait été construite en 1289 et où le comte Ugolino Della Gherardesca mourut avec ses enfants et ses petits-enfants.



Malgré lui, le comte Ugolino est devenu une figure centrale de la Divine Comédie de Dante dans le Canto XXXIII, où Dante accuse les traîtres à la patrie.



Un message antique a été codé à l'aide d'un cryptogramme polyalphabétique de type Vigenère, dont la clé est constituée par les vers du XXXIIIe canto de la Divine Comédie qui se réfèrent au comte Ugolino.

**Tu dei saper ch'i' fui conte Ugolino,  
e questi è l'arcivescovo Ruggieri:  
or ti dirò perché i son tal vicino.**

Il semblerait que déchiffrer ce message puisse révéler des runes arcaniques.

Le message est le suivant :  
'ZKQNGCVP GNGMZ CGJGZT'.  
Qu'est-ce que cela peut signifier ?



Comme il s'agit d'un cryptogramme de Vigenère, il faut associer à chaque lettre le nombre correspondant selon l'ordre alphabétique, en commençant par A → 0. Donc A → 0, B → 1, ..., Z → 25, puis en faisant la somme des lettres correspondantes du message et de la clé. Pour calculer la première lettre, on prend la première lettre du message (U), la première de la clé (T), et on fait la somme  $U+T=20+19=39$  ; comme elle est plus grande que 25, il faut soustraire 26, donc la première lettre est  $39-26=13=N$ .



Enfin, vous pouvez vous rendre à l'église de S. Antonio.



## Étape 7 : La magie des couleurs

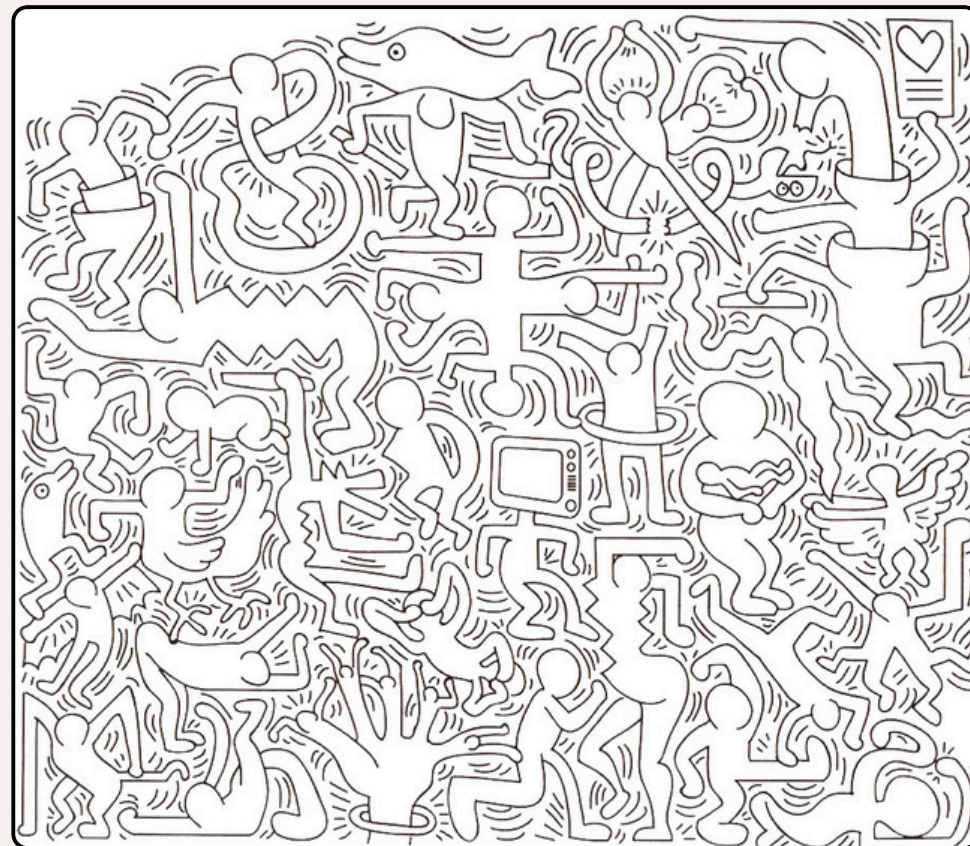
À l'église de S. Antonio, vous vous rendez compte que les dernières runes sont protégées par un puissant enchantement de mathémagie chromatique. Pour briser le lien chromatique créé par la peinture murale de Keith Haring, il faut utiliser moins de couleurs que lui !



Une peinture murale inhabituelle est exposée sur le mur arrière du couvent des frères "Servi di Mari" à l'église de S. Antonio. Depuis 1989, la peinture murale "Tuttomondo" de Keith Haring témoigne du passage à Pise de l'artiste.



Voici une représentation de la peinture sans les couleurs.




Essayez de colorier la peinture murale de Keith Haring avec le plus petit nombre de couleurs possible, de manière à ce qu'aucune zone d'une couleur ne touche une autre de la même couleur.

Rappelez-vous que le théorème des quatre couleurs stipule qu'il est toujours possible de réussir avec seulement quatre couleurs.



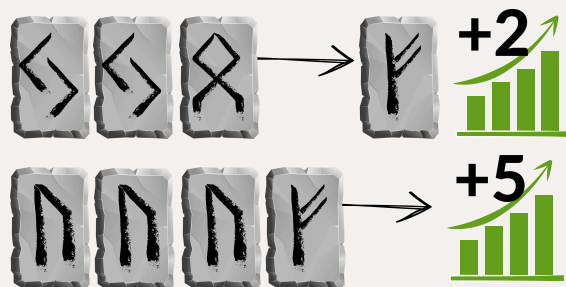


## Étape 8 : Combo de runes

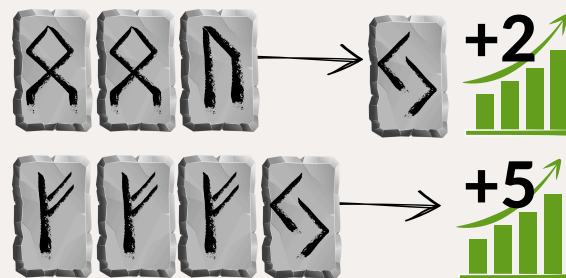
Vous pouvez maintenant utiliser les runes obtenues à Pise pour relever les défis posés par les Grands Mathémagiciens. Choisissez un défi, soustrayez le nombre de runes qu'il demande et recevez la récompense ! Vous pouvez relever des défis tant qu'il vous reste des  runes. Quel niveau de magie avez-vous atteint ?



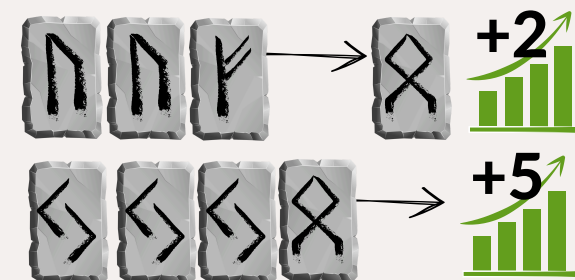
Diophante



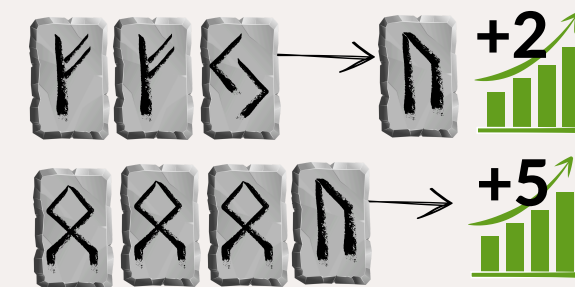
Pythagore



Archimède



Thalès



Euclide

